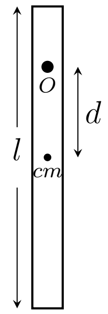
Esercizio 1 - Una sbarretta omogenea di massa m , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato a distanza d dal suo centro di massa cm. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla sua posizione di equilibrio stabile in funzione di m, l, d e dell'accelerazione di gravità.



Soluzione - Il momento d'inerzia rispetto ad O è dato da (teorema di Huygens-Steiner):

$$I_O = I_{cm} + m \cdot d^2 = \left(\frac{1}{12} l^2 + d^2 \right) \cdot m$$

Introduciamo l'asse z uscente dal foglio ed indichiamo con θ l'angolo formato tra la sbarretta e la direzione verticale ($\theta = 0$ nella posizione di equilibrio stabile, $\theta > 0$ per una rotazione antioraria). Indicando con α e τ le componenti lungo z dell'accelerazione angolare e della somma dei momenti delle forze agenti sulla sbarretta calcolati rispetto ad O e considerando che il momento rispetto ad O della reazione vincolare dell'asse orizzontale è nullo, possiamo scrivere la seconda equazione cardinale:

$$I_O \alpha = \tau = -d \cdot m \cdot g \cdot sin(\theta) \simeq -d \cdot m \cdot g \cdot \theta$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni l'equazione si scrive dunque: $\quad I_O \ddot{\theta} = -d \cdot m \cdot g \cdot \theta$

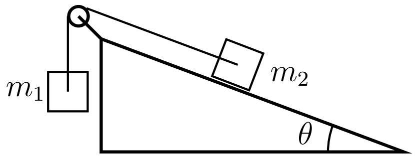
Ed il periodo risulta essere dato da (analogia col pendolo semplice) : $\quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_O}{d \cdot m \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{12} l^2 + d^2\right)}{d \cdot g}}$

Esercizio 2 - Il sistema rappresentato in figura è in equilibrio e sono trascurabili gli attriti e le masse della carrucola e della fune; inoltre la fune è inestensibile.

a) Calcolare l'espressione di θ in funzione di m_1, m_2 e dell'accelerazione di gravità.

b) Calcolare il valore numerico di θ nel caso $m_1 = 0.5 \cdot m_2$.

c) Cosa succede al sistema se si imprime ad m_1 una velocità iniziale v_0 lungo la verticale ?



Soluzione - Introducendo un asse x parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso ed indicando con T il modulo della tensione esercitata dalla fune, la componente x della risultante delle forze agenti su m_2 si scrive $-T + m_2 \cdot g \cdot sin(\theta)$, mentre lungo l'asse y la forza esercitata dal piano e la componente della forza peso si equilibrano. Per il corpo di massa m_1 conviene invece utilizzare un asse verticale diretto ad esempio verso l'alto, lungo il quale la risultante delle forze è data da $T - m_1 \cdot g$. Notiamo che i moduli della tensione esercitata ai due capi dalla fune sono uguali perchè la fune è inenstensibile e di massa trascurabile. La condizione di equilibrio di entrambi i corpi è dunque data dal sistema di equazioni :

$$-T + m_2 \cdot g \cdot sin(\theta) = 0$$
$$T - m_1 \cdot g = 0$$

Ricavando T dalla seconda e sostituendolo nella prima ricaviamo l'espressione di $sin(\theta)$: $\quad sin(\theta) = \frac{m_1}{m_2}$

Notiamo che tale espressione non dipende da g e che si può avere l'equilibrio solo se $m_1 \leq m_2$.

Questo è un caso di equilibrio indifferente, cioè la risultante delle forze è nulla per qualunque posizione dei due corpi, purchè la fune rimanga tesa. Per questa ragione, se imprimiamo ad m_1 una velocità iniziale, esso continuerà a muoversi con la stessa velocità, e conseguentemente anche m_2 si muoverà con velocità costante.

Esercizio 3 - Un gas perfetto esegue un ciclo reversibile a partire da un volume ed una temperatura iniziali V_1 e T_A . Il ciclo è costituito da:

1) una espansione isoterma fino ad un volume V_2;
2) una trasformazione isocora fino ad una temperatura T_B minore di T_A;
3) una compressione isoterma fino a raggiungere il volume iniziale V_1;
4) una trasformazione isocora che lo riporta nello stato iniziale.

Rappresentare il ciclo nel piano $p - V$, calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità date in precedenza e verificare che tale rendimento è minore di quello di un ciclo di Carnot che operi fra le stesse temperature T_A e T_B.

Come si può realizzare un tale ciclo, avendo a diposizione dei termostati?

Soluzione - Il calore assorbito ed il lavoro eseguito dal sistema nelle quattro trasformazioni sono dati da:

$Q_1 = n \cdot R \cdot T_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad W_1 = Q_1 \quad$ ($Q_1 > 0$: il sitema assorbe calore ed esegue un lavoro sull'esterno)
$Q_2 = n \cdot c_v \cdot (T_B - T_A) \quad W_2 = 0 \quad$ ($Q_2 < 0$: il lavoro compiuto è nullo ed il sistema deve cedere calore perchè la temperatura diminuisca)
$Q_3 = n \cdot R \cdot T_B ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \quad W_3 = Q_3 \quad$ ($Q_3 < 0$: il sitema cede calore e subisce un lavoro dall'esterno)
$Q_4 = n \cdot c_v \cdot (T_A - T_B) \quad W_4 = 0 \quad$ ($Q_4 > 0$: il sistema deve ricevere calore dall'esterno affinchè pressione e temperatura aumentino a volume costante)

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal sistema ed il calore assorbito dall'esterno:

$$\eta = \frac{W_1 + W_3}{Q_1 + Q_4} = \frac{nR(T_A - T_B) ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{nRT_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_A - T_B)} = \frac{1}{\frac{T_A}{T_A - T_B} + \frac{c_v}{Rln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}$$

Se il secondo termine a denominatore fosse nullo, il rendimento sarebbe uguale a quello del ciclo di Carnot; poichè è invece positivo, il rendimento è minore.
Il ciclo si realizza mettendo a contatto il sistema con termostati alle temperature T_A e T_B per le trasformazioni isoterme e con termostati la cui temperatura varia lentamente tra T_A e T_B (e viceversa) per le isocore.