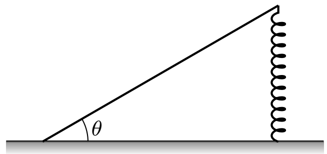
Esercizio 1 - Nel sistema in figura la molla (costante elastica k, lunghezza di riposo l_0) può muoversi verticalmente. Al suo estremo libero è vincolato l'estremo di una sbarretta (massa m, lunghezza d, con $d > l_0$); l'altro estremo della sbarretta può scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Il sistema ha due posizioni di equilibrio. Calcolare l'espressione di θ per tali posizioni in funzione delle quantità sopra indicate e dell'accelerazione di gravità e specificare il tipo di equilibrio.



Soluzione - Introduciamo un asse z verticale diretto verso l'alto, con l'origine alla quota del piano di sostegno e scegliamo tale quota come zero dell'energia potenziale della forza peso. Indicando con z e z_{cm} le coordinate z dell'estremo della molla e del centro di massa della sbarretta, ed esprimendo poi z e z_{cm} in funzione dell'angolo θ, l'energia potenziale del sistema si scrive:

$$U(\theta) = mgz_{cm} + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 = \frac{1}{2}mgd\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(d\sin\theta - l_0\right)^2$$

Indicando con U' la derivata rispetto a θ, la condizione di equilibrio è data da:

$$U'(\theta) = \frac{1}{2}mgd\cos\theta + k\left(d\sin\theta - l_0\right)d\cos\theta = d\cos\theta\left(\frac{1}{2}mg + kd\sin\theta - kl_0\right) = 0$$

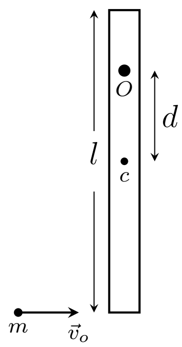
L'uguagliaza si ha per i due valori di θ dati da: $\theta = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \sin\theta = \frac{-\frac{1}{2}mg + kl_0}{kd} = \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2}\frac{mg}{kd}$
$\theta = \frac{\pi}{2}$ è una posizione di equilibrio instabile perchè l'energia potenziale ha un massimo; infatti il termine in parentesi nell'espressione di U' è positivo per $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(l_0 < d)$ e mantiene lo stesso segno per piccoli spostamenti da tale valore ; quindi U' ha lo stesso segno di $\cos\theta$.
Consideriamo ora l'espressione che ci da il secondo valore di θ : se $m = 0$, la posizione di equilibrio corrisponde alla posizione di riposo della molla, come ci aspettiamo; all'aumentare di m l'angolo diminuirà fino ad arrivare a zero quando la somma dei due addendi si annulla. Abbiamo dunque, al variare di m, un angolo di equilibrio compreso tra 0 e $\arcsin\left(\frac{l_0}{d}\right)$. Il segno di U' mostra poi che si tratta di equilibrio stabile. Analoghe considerazioni si possono fare per variazioni delle altre quantità.
Il tipo di equilibrio si può anche studiare analizzando il segno della derivata seconda:

$$U''(\theta) = -d\sin\theta\left(\frac{1}{2}mg + kd\sin\theta - kl_0\right) + kd^2\cos^2\theta$$

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ il secondo addendo è nullo ed il primo negativo $(l_0 < d)$; per $\sin\theta = \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2}\frac{mg}{kd}$ il primo addendo è nullo ed il secondo, ovviamente, positivo.

A parte la matematica, il tipo di equilibrio si può ricavare considerando l'andamento delle forze e dei momenti per piccoli spostamenti dalle due posizioni.

Esercizio 2 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato a distanza d dal suo centro di massa c ed è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa m si conficca nell'estremo inferiore della sbarretta e rimane solidale con essa. Prima dell'urto il proiettile ha velocità orizzontale $\vec{v}_o$; ipotizzando che l'urto avvenga in un intervallo di tempo molto breve in modo che si possa trascurare il moto della sbarretta:
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema in funzione dell'angolo formato dalla sbarretta con la verticale e delle quantità date in precedenza.
b) Calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del proiettile, v_o, affinchè la sbarretta possa compiere un giro completo.
c) Come vanno modificate le espressioni ottenute se il proiettile si conficca sempre nell'estremo della sbarretta ma la sua velocità iniziale forma un angolo φ con l'asse orizzontale ?



Soluzione - Fissiamo in O l'origine del sistema di riferimento e il livello zero per l'energia potenziale della forza peso. Indichiamo con I il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione e con r_{cm} la distanza del suo centro di massa da O:
$I = \frac{1}{12}Ml^2 + Md^2 + m\left(d+\frac{l}{2}\right)^2 \quad ; \quad r_{cm} = \frac{Md + m\left(d+\frac{l}{2}\right)}{m+M} = d + \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}$
L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare respetto ad O. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare. Il momento angolare iniziale è quello del solo proiettile, perpendicolare ed uscente dal piano della figura. Introducendo un asse z che ha tale direzione e verso ed indicando con ω_o il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto, l'uguaglianza tra le componenti z dei momenti angolari iniziale e finale si scrive:
$mv_o\left(d+\frac{l}{2}\right) = I\omega_o \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{mv_o}{I}\left(d+\frac{l}{2}\right)$
Dopo l'urto, le forze esterne agenti sul sistema sono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare, che non compie lavoro. Di conseguenza durante il moto si conserva l'energia meccanica; indicando con θ l'angolo formato tra la sbarretta e l'asse verticale ($\theta = 0$ nella posizione iniziale) e con ω il modulo della velocità angolare nella posizione θ, la conservazione dell'energia si scrive:
$\frac{1}{2}I{\omega^2}_o - r_{cm}(m+M)g = \frac{1}{2}I\omega^2 - r_{cm}\cos\theta(m+M)g \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = {\omega^2}_o - \frac{2}{I}r_{cm}(m+M)(1-\cos\theta)g$
richiedendo che il secondo membro sia positivo si può ricavare l'angolo massimo che il sistema può raggiungere, Il valore minimo richiesto al punto b) si ricava imponendo che la sbarretta arrivi nella posizione verticale $\theta = \pi$ con velocità angolare nulla; quindi:
${\omega^2}_{omin} = \frac{4}{I}r_{cm}(m+M)g \quad \Rightarrow \quad v_{omin} = \frac{1}{m\left(d+\frac{l}{2}\right)}I\omega_{omin} = \frac{1}{m\left(d+\frac{l}{2}\right)}I\sqrt{\frac{4}{I}r_{cm}(m+M)g} = \frac{2}{m\left(d+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{Ir_{cm}(m+M)g}$
Se la velocità iniziale forma un angolo φ con l'asse orizzontale nelle espressioni precedenti v_o va moltiplicato per $\cos\varphi$.

Esercizio 3 - Un contenitore a pareti adiabatiche è chiuso da un pistone, anch'esso adiabatico e disposto orizzontalmente, di massa M e sezione S; esso contiene n moli di gas perfetto alla temperatura T_1. Il sistema è in equilibrio; calcolare il volume del gas in funzione delle quantità date, dell'accelerazione di gravità e della costante R dei gas.
Successimante viene appoggiato al pistone un corpo di massa m e il pistone si muove lentamente verso un nuovo stato di equilibrio; calcolare il volume del gas nello stato finale e verificare che è minore di quello iniziale; calcolare la temperatura finale e verificare che è maggiore di quella iniziale.

Soluzione - La forza esercitata dal gas sul pistone è normale alla sua superficie, diretta verso l'esterno del contenitore ed ha modulo pS, dove p è la pressione del gas. Si ha l'equilibrio quando la risultante di tale forza e della forza peso è nulla. Poichè la trasformazione tra i due stati di equilibrio avviene lentamente,

è reversibile e possiamo applicare l'equazione caratteristica della trasformazione adiabatica. Assegnando i pedici 1 e 2 agli stati iniziale e finale possiamo quindi scrivere:
Equilibrio del pistone nello stato iniziale : $p_1 S = Mg$
Equazione di stato nello stato iniziale: $p_1 V_1 = nRT_1$
Equilibrio del pistone nello stato finale : $p_2 S = (M+m)g$
Equazione di stato nello stato finale: $p_2 V_2 = nRT_2$
Equazione caratt. della trasf. adiabatica: $p_2 {V_2}^{\gamma} = p_1 {V_1}^{\gamma}$
Dalla prima e dalla seconda equazione: $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{nRT_1 S}{Mg}$; dalla quinta, ed utilizzando la prima e la terza: $V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_1 \left(\frac{M}{M+m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$
Dalle equazioni di stato ed utilizzando l' espressione di V_2 e di V_1: $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}\right) = T_1 \left(\frac{M+m}{M}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$
Poichè $\frac{1}{\gamma}$ e $1 - \frac{1}{\gamma}$ sono positivi, i fattori che moltiplicano V_1 e T_1 nelle ultime due espressioni sono rispettivamente minore e maggiore di 1.
La trasformazione lenta si può realizzare, ad esempio, mediante un cavo che lascia scendere lentamente il pistone o mediante l'attrito tra il pistone e le pareti del contenitore; in quest'ultimo caso il calore prodotto verrebbe disperso verso l'esterno perchè il contatto col gas è adiabatico. Se invece il pistone viene lasciato libero di scendere senza attrito il pistone oscillerebbe attorno ad una qualche posizione ma non potremmo applicare le equazioni precedenti perchè il gas non sarebbe in equilibrio termodinamico in ogni istante.