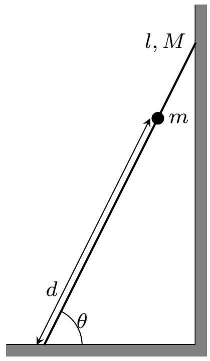
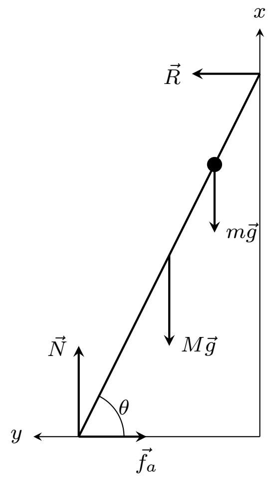
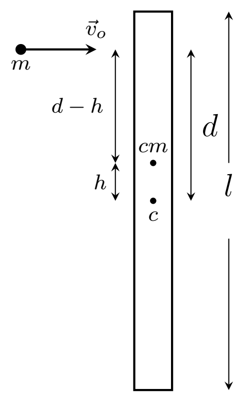
Esercizio 1 - Una scale di massa di massa M e lunghezza l è posizionata come in figura. Il contatto con la parete verticale è liscio, mentre il coefficiente di attrito statico del contatto col pavimento è μ_s. Un uomo, che assimiliamo ad un punto materiale di massa m, sale su di essa. Calcolare la massima distanza d che può percorrere lungo la scala in funzione delle quantità date e dell'angolo θ.



Soluzione - Un corpo rigido (nel nostro caso il sistema scala + uomo) è in equilibrio quando sono nulle la risultante delle forze esterne e la somma dei momenti di tali forze calcolati rispetto ad un qualsiasi punto. L'equilibrio delle forze lungo gli assi x e y si scrive rispettivamente:
$N - Mg - mg = 0 \quad ; \quad R - f_a = 0$
Se scegliamo come polo il punto d'appoggio della scala sulla parete i momenti delle forze sono tutti diretti lungo l'asse z :
$(l-d)mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \frac{l}{2}Mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - lN\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + lf_a\sin(\pi-\theta) = 0 \quad \Rightarrow$
$(l-d)mg\cos\theta + \frac{l}{2}Mg\cos\theta - lN\cos\theta + lf_a\sin\theta = 0$
In queste equazioni i simboli rappresentano i moduli dei vettori definiti in figura; $\vec{R}$ ed $\vec{N}$, per la natura del vincolo, hanno necessariamente il verso indicato, mentre ad $\vec{f_a}$ abbiamo assegnato il verso che ci aspettiamo che tale forza debba avere. Se dalla soluzione del sistema di equazioni dovesse risultare che R o N sono negativi, vorrebbe dire che l'equilibrio è impossibile nella configurazione data, mentre se dovesse risultare che f_a è negativo, allora il verso è opposto a quello ipotizzato in figura. Il sistema di tre equazioni permette di ricavare le tre incognite R, N ed f_a in funzione delle altre quantità, in particolare di d. Per rispondere alla domanda del problema è preferibile ricavare d in funzione di f_a: l'applicazione della condizione $f_a \le \mu_s N$ ci darà la limitazione su d. Quindi ricaviamo N dalla prima equazione, sostituiamolo nella terza, ricaviamo d dalla terza e sostituiamo la condizione su f_a , che risulta essere $\quad f_a \le \mu_s(m+M)g$:
$d = l\left(\frac{f_a}{mg}\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad d_{max} = l\left(\mu_s\left(1+\frac{M}{m}\right)\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right)$
Come vediamo, $\frac{d_{max}}{l}$ dipende da tre parametri: aumenta con μ_s e θ, mentre non è immediato analizzare l'andamento al variare di $\frac{M}{m}$; inserendo i valori $\mu_s = 0.5$ (vedi tabelle dei coefficienti d'attrito) e $\theta = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $\frac{d_{max}}{l} = 0.5$; sembra un valore ragionevole, per una scala messa a 45 gradi !.
Notiamo che in questo caso non possiamo risolvere il problema analizzando l'andamento dell'energia potenziale perchè la forza d'attrito compie lavoro e non è conservativa.

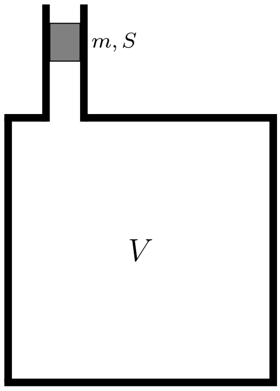


Esercizio 2 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l è appoggiata su un piano orizzontale liscio ed è inizialmente in quiete; un proiettile di massa m si muove come in figura (c è il centro di massa della sbarretta) e si conficca nella sbaretta rimanendole solidale. L'urto avviene in un tempo sufficientemente breve perchè la sbarretta possa essere considerata a riposo durante tale processo. Detto cm il centro di massa del sistema dopo l'urto:
a) Determinare la distanza di cm da c in funzione delle quantità definite in figura e delle masse;
b) scrivere l'espressione della velocità di cm in funzione di $\vec{v_o}$;
c) scrivere l'espressione della velocità angolare di rotazione attorno a cm in funzione di v_o.
Trascurare gli effetti della forza peso sul proiettile prima dell'urto.



Soluzione - Dopo l'urto, il centro di massa del sistema si trova ad una distanza da c data da: $\quad h = \frac{m}{m+M}d$.
Trascurando la forza peso agente sul proiettile prima dell'urto, abbiamo che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema (forza peso e reazione vincolare del piano) hanno risultante nulla sia prima che dopo l'urto (dopo l'urto il sistema si muoverà sul piano di appoggio). Quindi si conserva la quantità di moto. In un sistema di riferimento con origine fissa nel punto c, indicando con $\vec{v}_{cm}$ la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto, la conservazione della quantità di moto si scrive: $\quad m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v}_{cm} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \frac{m}{m+M}\vec{v}_o$
Per il momento angolare $\vec{L}$ calcolato rispetto ad un generico polo p che abbia velocità $\vec{v}_p$ vale la relazione (dinamica dei sistemi):
$\frac{d\vec{L}}{dt} = -(m+M)\vec{v}_p \times \vec{v}_{cm} + \vec{\tau}_{ext}$
$\vec{\tau}_{ext}$ (somma dei momenti delle forze esterne) è nullo; se scegliamo come polo il centro di massa del sistema anche il primo addendo è nullo ed il momento angolare del sistema si conserva. Introducendo un asse z verticale ed entrante nel piano della figura, $\vec{L}$ avrà solo componente lungo z e la conservazione di $\vec{L}$ lungo z prima e dopo l'urto si scriverà:
$mv_o(d-h) = I\omega$. I è il momento d'inerzia rispetto al centro di massa del sistema: $\quad I = \frac{1}{12}Ml^2 + Mh^2 + m(d-h)^2$.
Quindi : $\quad \omega = \frac{mv_o(d-h)}{I} \quad ; \quad \vec{\omega} = \frac{mv_o(d-h)}{I}\hat{z}$. $\qquad$ Notare che $d-h > 0$.
Domanda per i più curiosi: dove si trova, ad un generico istante di tempo, l'asse istantaneo di rotazione ?

Esercizio 3 - Un serbatoio di volume $V = 100l$ è collegato come in figura ad un pistone disposto orizzontalmente di massa $m = 0.05kg$ e sezione $S = 2cm^2$; la forza di attrito statico massima tra il pistone e le pareti del recipiente è $F = 0.3N$. Il recipiente contiene $0.1mol$ di gas perfetto monoatomico ed è a contatto con un termostato alla temperatura $T = 270K$.
Il pistone è in equilibrio meccanico ? se la risposta è sì calcolare la quantità di calore che bisogna sottrarre al gas, tolto il contatto col termostato ed ipotizzando che il calore venga scambiato lentamente e a volume costante, perchè inizi a muoversi.
Trascurare la pressione atmosferica ed il volume del tubo in cui scorre il pistone.



Soluzione - La forza peso e la forza d'attrito hanno la stessa direzione verticale, la forza d'attrito può essere rivolta verso l'alto o verso il basso; il gas esercita sul pistone una forza diretta verso l'alto di modulo pS, dove p è la pressione. Introducendo un asse z verticale diretto verso il basso ed indicando con f_a la componente della forza d'attrito lungo z (può essere positiva o negativa) , la condizione d'equilibrio del pistone lungo z si scrive: $mg + f_a - pS = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{mg+f_a}{S}$.
f_a (attrito statico) può assumere tutti i valori compresi tra $-F$ ed F, quindi il pistone è in equilibrio per
$\frac{mg-F}{S} \leq p \leq \frac{mg+F}{S} \quad (*) \quad \Rightarrow$ (equazione di stato, $T = \frac{pV}{nR}$) $\frac{mg-F}{nRS}V \leq T \leq \frac{mg+F}{nRS}V$
Numericamente, ed utilizzando il valore molto approssimato $g \approx 10ms^{-2}$: $120K \leq T \leq 481K$. Quindi alla temperatura data il pistone è in equilibrio. Indicando con T_1 la temperatura di equilibrio inferiore, per portare il gas ad una temperatura minore di T_1 e far muovere il pistone dobbiamo sottrargli una quantità di calore maggiore di $nc_v(T - T_1)$.
Se volessimo tener conto della pressione atmosferica p_a, dovremmo aggiungere p_a ai due valori estremi in $(*)$.