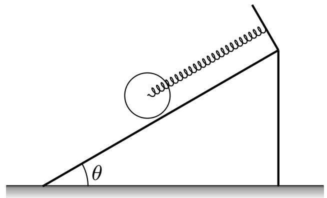
Esercizio 1 - Nel sistema in figura la molla ha costante elastica k e lunghezza di riposo ℓ_0 e il disco (massa m, raggio R) rotola senza strisciare sul piano inclinato. Inizialmente la molla ha lunghezza ℓ_0 ed il disco ha velocità nulla; calcolare:
a) La lunghezza della molla alla quale il sistema è in equilibrio.
b) La velocità del centro di massa e la velocità angolare del disco nel punto di equilibrio.



Soluzione - Introduciamo un asse x nel piano della figura, parallelo al piano inclinato, rivolto verso il basso e con l'origine nell'estremo della molla vincolato al piano inclinato; scegliendo la quota di tale punto come zero dell'energia potenziale della forza peso, l'energia potenziale del sistema si scrive:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - mgx\sin\theta$$

I due termini rappresentano l'energia potenziale elastica e quella della forza peso. Le altre due forze agenti sul disco, reazione normale del piano inclinato e forza d'attrito statico, non compiono lavoro. (notare: il centro di massa si trova al di sotto del livello zero dell'energia potenziale della forza peso , che è quindi negativa). Indicando con U' la derivata rispetto ad x, la condizione di equilibrio è data da:

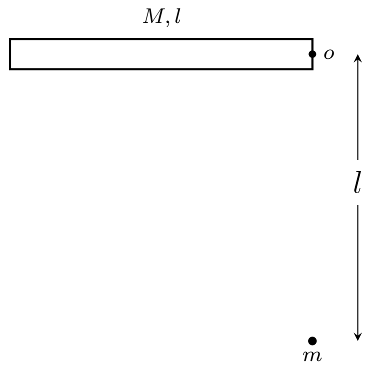
$$U'(x) = k(x - \ell_0) - mg\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg\sin\theta}{k}$$

(notare: $x_{eq} > \ell_0$, x_{eq} aumenta con θ e diminuisce con k). Per calcolare la velocità nella posizione di equilibrio, applichiamo la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale, nella quale l'energia cinetica e quella potenziale elastica sono nulle, e la posizione x_{eq}:

$$-mg\ell_0\sin\theta = \frac{1}{2}k(x_{eq} - \ell_0)^2 - mgx_{eq}\sin\theta + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \pm g\sin\theta\sqrt{\frac{2}{3}\frac{m}{k}}$$

I quattro termini a destra sono rispettivamente: energia potenziale elastica e della forza peso, energia cinetica del centro di massa, energia cinetica di rotazione. v_{cm} è la velocità scalare lungo l'asse x, $I = \frac{1}{2}mR^2$ è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse perpendicolare alla sua superficie passante per il centro di massa. Poichè il moto è di rotolamento puro, $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$. La seconda uguaglianza si ottiene sostituendo l'espressione di x_{eq}, la terza quella di I ed ω. L'espressione finale è molto semplice perchè si è scelto come posizione iniziale quella di riposo della molla.

Esercizio 2 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato ad un suo estremo. Inizialmente la sbarretta si trova in posizione orizzontale, come in figura. Viene lasciata libera ed urta un corpo di massa m assimilabile ad un punto materiale , situato nella posizione indicata in figura ed inizialmente a riposo , che si conficca nella sbarretta.
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare della sbarretta subito prima dell'urto.
b) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto.
c) Scrivere l'espressione del valore massimo dell'angolo che il sistema forma con la verticale dopo l'urto.



Soluzione
a) Prima dell'urto sulla sbarretta agiscono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare dell'asse, che non compie lavoro. Si conserva dunque l'energia totale. Fissando in o il livello zero dell'energia potenziale della forza peso, la conservazione dell'energia si scrive:
$0 = -Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{3}Ml^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3\frac{g}{l}}$
b) L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto ad o. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale durante l'urto; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare. Inizialmente il punto materiale è a riposo, quindi il momento angolare iniziale è quello della sola sbarretta, è perpendicolare ed uscente dal piano della figura. Introducendo un asse z che ha tale direzione e verso ed indicando con ω' il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto, l'uguaglianza tra le componenti z dei momenti angolari iniziale e finale si scrive in modo molto semplice:
$I\omega = I'\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{I}{I'}\omega \quad ; \quad I' = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$
c) Dopo l'urto valgono le stesse considerazioni del punto a). Indicando con θ_m l'angolo massimo e considerando che nella posizione θ_m l'energia cinetica è nulla, la conservazione dell'energia tra le posizioni $\theta = 0$ e $\theta = \theta_m$ si scrive:
$\frac{1}{2}I'\omega'^2 - Mg\frac{l}{2} - mgl = (-Mg\frac{l}{2} - mgl)\cos\theta_m \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_m = 1 - \frac{\frac{1}{2}I'\omega'^2}{Mg\frac{l}{2} + mgl} = 1 - \frac{1}{6(\frac{1}{3} + \frac{m}{M})(\frac{1}{2} + \frac{m}{M})}$
notare il valore che si ottiene per $m = 0$.

Esercizio 3 - Un gas perfetto esegue un ciclo reversibile a partire da un volume ed una pressione iniziali V_1 e p_1 . Il ciclo è costituito da:
1) una espansione isoterma fino ad un volume V_2;
2) una compressione isobara fino al volume V_1;
3) una trasformazione isocora che lo riporta nello stato iniziale.

a) Rappresentare il ciclo nel piano $p - V$.
b) Detta T_1 la temperatura iniziale, scrivere l'espressione di T_2, temperatura alla fine della compressione isobara, in funzione di T_1, V_1 e V_2.
c) Calcolare il rendimento del ciclo in funzione di T_1, T_2, V_1 e V_2.

Soluzione
b)Indicando con p_2 la pressione dell'isobara, scriviamo l'equazione di stato all'inizio ed al termine della trasformazione:
$p_2V_2 = nRT_1 \quad ; \quad p_2V_1 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1}{V_2}$.

c) Il calore assorbito ed il lavoro eseguito dal sistema nelle tre trasformazioni sono dati da:

$Q_1 = n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $\quad W_1 = Q_1$ $\quad$ ($Q_1 > 0$: il sistema assorbe calore ed esegue un lavoro sull'esterno)

$Q_2 = n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) < 0$ $\quad W_2 = p_2 \cdot (V_1 - V_2)$ $\quad$ ($W_2 < 0$: viene eseguito un lavoro sul sistema, che deve cedere calore per restare alla stessa pressione)

$Q_3 = n \cdot c_v \cdot (T_1 - T_2)$ $\quad W_3 = 0$ $\quad$ ($Q_3 > 0$: il sistema deve ricevere calore per aumentare la pressione a volume costante)

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal sistema ed il calore assorbito dall'esterno:

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1 + Q_3} = \frac{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + p_2(V_1 - V_2)}{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_1 - T_2)} = \frac{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nR(T_2 - T_1)}{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_1 - T_2)}$$