Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 1/07/2013

1 Quesito 1)

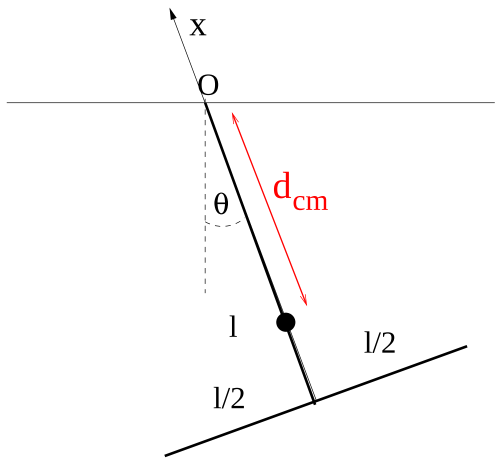

Figura 1: Quesito 1

La risposta alla prima domanda (valore della velocità del centro di massa del sistema costituito dalle due sbarre saldate a **T** in $\theta = 0°$) segue dal principio di conservazione dell'energia meccanica, applicabile in questo caso poichè i vincoli in O sono lisci. La posizione del centro di massa si determina sfruttando la simmetria del sistema (il centro di massa deve giacere sulla direzione individuata dalla sbarra direttamente fissata al perno). Definita un'ascissa x come mostrato in figura si può scrivere:

$$x_{CM} = \frac{0\ m + \frac{l}{2}m}{2m} = \frac{1}{4}l \tag{1}$$

La distanza del centro di massa da O, d_{CM}, è quindi $\frac{3}{4}l$.
Fissato il livello *zero* dell'energia potenziale gravitazionale in corrispondenza della quota di O [1], il principio di conservazione dell'energia meccanica conduce alla seguente relazione:

$$-2mgd_{CM}cos\theta_0 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 - 2mgd_{CM}cos\theta \tag{2}$$

[1] questa scelta è inizialmente arbitraria (contano le differenze di potenziale), ma una volta fissato lo zero occorre essere coerenti con la scelta fatta

in cui θ_0 rappresenta il valore dell'angolo formato con la verticale all'istante iniziale (tutta l'energia del sistema è potenziale), ω è il modulo della velocità angolare ed I_O è momento di inerzia del sistema complessivo rispetto ad un asse orizzontale passante per O. Utilizzando il teorema di Huygens-Steiner, e sfruttando l'additività del momento di inerzia, I_O si può scrivere come segue:

$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + ml^2 = \frac{17}{12}ml^2 \tag{3}$$

Il primo termine si riferisce alla sbarra direttamente fissata al perno, il secondo rappresenta il momento di inerzia della seconda sbarra rispetto ad un asse orizzontale passante per il suo centro ed il terzo è il termine di Huygens-Steiner.
Valutando l'equazione 2 in θ=0° e combinandola con l'equazione 3 si ricava che:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4mgd_{CM}}{I_O}\,(1-cos\theta_0)} = \sqrt{\frac{36}{17}\,\frac{g}{l}\,(1-cos\theta_0)} \tag{4}$$

in cui ω_0 è il modulo della velocità angolare del sistema al passaggio per θ=0°. Numericamente, $\omega_0 = 1.11$ rad/s. Il modulo della velocità del centro di massa del sistema si ricava notando che esso si muove su una traiettoria circolare di raggio d_{CM}, quindi v_{CM}=$\omega_0 d_{CM}$. Numericamente, v_{CM}=0.84 m/s.
La stima del tempo necessario a raggiungere per la prima volta la configurazione θ=0°, si può ottenere osservando che il sistema è un pendolo fisico la cui equazione di moto si riduce a quella di un oscillatore armonico nel caso di piccole oscillazioni. L'equazione di moto del sistema si ricava utilizzando le equazioni cardinali o equivalentemente derivando rispetto al tempo la relazione 2 che esprime il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$I_O\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2mgd_{CM}sen\theta(t) = 0 \tag{5}$$

che per piccole oscillazioni ($sen\theta \sim \theta$) diviene :

$$I_O\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2mgd_{CM}\theta(t) = 0 \tag{6}$$

che descrive un moto puramente armonico con periodo T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{2mgd_{CM}}} \tag{7}$$

Il tempo $T_{1/4}$ impiegato a raggiungere per la prima volta la configurazione θ=0° è quindi pari ad $\frac{1}{4}$ del periodo di un'oscillazione completa.

Numericamente, $T_{1/4}$=0.49 s.
Una verifica della ragionevolezza di questa approsimazione si può ottenere ricavando la velocità angolare del sistema nell'ipotesi di moto puramente armonico, e confrontando quindi il valore approssimato con quello esatto ricavato dal principio di conservazione dell'energia meccanica. Definita ϕ la pulsazione propria del moto armonico associato al sistema:

$$\phi = \sqrt{\frac{2mgd_{CM}}{I_O}} \tag{8}$$

il modulo della velocità angolare vale

$$\omega_{harm}(t) = \theta_0 \phi sen\phi t \tag{9}$$

che calcolata in t=$T_{1/4}$ conduce a $\omega_{harm}(T_{1/4})$=1.12 rad/s. Confrontando quest'ultimo valore con ω_0 ottenuto nell'equazione 4 si osserva che l'approssimazione è verificata, date le specifiche condizioni iniziali di questo problema, a livello dell'1%.

2 Quesito 2)

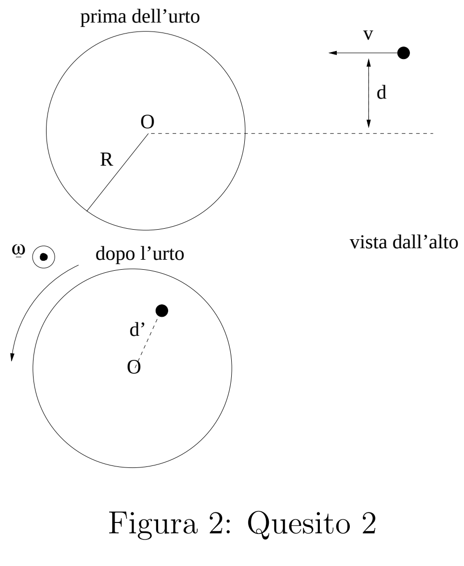

Figura 2: Quesito 2

La risposta ad entrambe le domande del quesito deriva dallo studio dell'urto tra il proiettile (particella puntiforme) e il disco (corpo rigido). Nell'urto non si conserva l'energia cinetica (urto anelastico) e neppure la quantità di moto, a causa dell'azione di forze di natura impulsiva (le reazioni vincolari applicate nel centro O del disco). Si conserva invece il momento angolare del sistema rispetto ad un polo coincidente con O, come espresso dalla seguente relazione:

$$mvd = I'_o \omega_f \tag{10}$$

Il primo termine rappresenta il momento angolare del sistema (disco + proiettile) immediatamente prima dell'urto (il disco è fermo e tutto il momento angolare è riconducibile al proiettile). Il secondo termine è il momento angolare del sistema subito dopo l'urto. I'_O è il momento di inerzia complessivo rispetto ad un asse verticale passante per O e ω_f la velocità angolare del sistema immediatamente dopo l'urto (numericamente pari a 2π rad/s). In base alla definizione di momento di inerzia si ha che:

$$I'_O = \frac{1}{2}MR^2 + md'^2 \tag{11}$$

in cui d' è la distanza dal centro a cui si arresta il proiettile dopo essersi conficcato nel disco. Combinando le equazioni 10 e 11, si ottiene:

$$d' = \sqrt{\frac{dv}{\omega_f} - \frac{1}{2}\frac{M}{m}R^2} \tag{12}$$

Numericamente, d'=0.73 m.
Il calcolo della percentuale di energia dissipata nell'urto si ricava dalla diminuizione ΔE di energia cinetica dovuta all'inelasticità dell'urto (l'energia "persa" è convertita in calore).

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I'_O\omega_f^2 \tag{13}$$

Numericamente, la percentuale di energia dissipata è il 98%.

3 Quesito 3)

La soluzione del terzo quesito deriva dallo studio delle proprietà delle trasformazioni che costituiscono il ciclo termodinamico. Dall'equazione di stato dei gas perfetti si determina il valore del volume nello stato B. A tale scopo, nota T_C, si determina P_C (V_C=V_A, CA è isocora). Una volta ricavata P_C=P_B (BC è isobara) si calcola V_B (T_B=T_A, AB è isoterma). Numericamente V_B=3 m^3.

In figura sono rappresentate le trasformazioni reversibili che compongono il ciclo descritto nel testo.

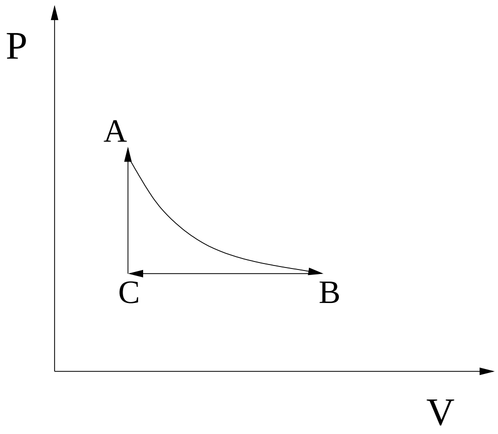

Figura 3: Quesito 3

- trasformazione A$\rightarrow$B (isoterma) A livello infinitesimale si ha: $dU = 0 \rightarrow dQ = dL = pdV$ [2].

$$L_{AB} = \int_A^B pdV = \int_A^B nRT_{A/B}\frac{dV}{V} = nRT_{A/B}log\frac{V_B}{V_A} \tag{14}$$

Numericamente L_{AB} = Q_{AB} = 2021.65 J

- trasformazione B$\rightarrow$C (isobara). Q_{BC}=nC_p (T_C-T_B) e L_{BC}=$P_{B,C}$ (V_C-V_B). Numericamente, Q_{BC}=-5817 J e L_{BC}=-1662 J. La variazione di energia interna U_{BC}=Q_{BC}-L_{BC} è numericamente -4155 J.

- trasformazione C$\rightarrow$A (isocora), L_{CA}=0. U_{CA}= Q_{CA} = nC_v (T_A-T_C). Numericamente, si ottiene U_{CA}= Q_{CA} = 4155 J.

Il rendimento del ciclo termodinamico

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{AB} + Q_{CA}} \tag{15}$$

Numericamente, η=5.8%.

La verifica della relazione di Mayer segue dal fatto che la variazione di energia interna nella trasformazione isoterma AB è nulla.

[2] Si noti tuttavia che dL e dQ, a differenza di dU, riferito ad una funzione di stato, non sono in generale differenziali esatti

$$U(B) - U(A) = U(C) - U(A) + U(B) - U(C) = 0$$

Poichè la trasformazione AC è isocora

$$U(C) - U(A) = nC_v(T_C - T_{A,B})$$

e la trasformazione BC è isobara

$$U(B) - U(C) = nC_p(T_{A,B} - T_C) - P_{C,B}(V_B - V_{C,A})$$

si ottiene, sostituendo, la seguente relazione:

$$nC_v(T_C - T_{A,B}) + nC_p(T_{A,B} - T_C) - P_{C,B}(V_B - V_{C,A}) = 0$$

Osservando che $P_{C,B}V_B = nRT_{A,B}$ e che $P_{C,B}V_{C,A} = nRT_C$ si ottiene

$$-nC_v(T_{A,B} - T_C) + nC_p(T_{A,B} - T_C) - nR(T_{A,B} - T_C) = 0$$

Ciò è verificato per $C_p - C_v = R$. Dunque la relazione di Mayer risulta verificata.