Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 5/09/2012

1 Quesito

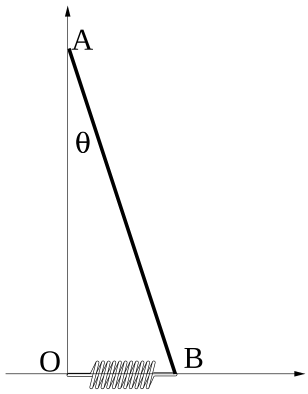

Figura 1: Quesito 1

La soluzione del primo quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) nella configurazione in cui l'angolo θ=45°. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k4l^2(\sin\theta - \sin\theta_0)^2 \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato alla sbarra, il secondo quello associato alla forza elastica esercitata dalla molla. (Si è assunto come 0 dell'enegia potenziale gravitazionale il livello corrispondente ad y=0 rispetto ad un sistema di riferimento con asse x lungo il segmento orizzontale OB ed asse y verticale). Il termine associato alla forza elastica è ricavato sfruttando l'informazione che la lunghezza a riposo della molla si ha nella configurazione θ_0=30° ed ha valore $2lsen\theta_0$. L'allungamento della molla per un generico angolo θ vale quindi $2l(sen\theta - sen\theta_0)$. Derivando rispetto a θ l'espressione in eq.1, si ottiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = -mgl\sin\theta + 4kl^2(\sin\theta - \sin\theta_0)\cos\theta \tag{2}$$

Imponendo che $\frac{dU}{d\theta}$=0 in θ=θ_{eq}=45°, e risolvendo rispetto a k, si ottiene

$$k_{eq} = \frac{mg \tan \theta_{eq}}{4l(\sin \theta_{eq} - \sin \theta_0)} \tag{3}$$

Numericamente, k_{eq}=118.2 N/m
La risposta alla seconda domanda si ottiene studiando il segno della derivata seconda dell'energia potenziale

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -mgl \cos \theta + 4kl^2(\cos^2 \theta) - 4kl^2 \sin \theta(\sin \theta - \sin \theta_0) \tag{4}$$

valutata in θ=θ_{eq} e k=k_{eq}:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq}, k_{eq}) > 0 \tag{5}$$

Ne segue quindi che la configurazione descritta è di equilibro stabile.

2 Quesito

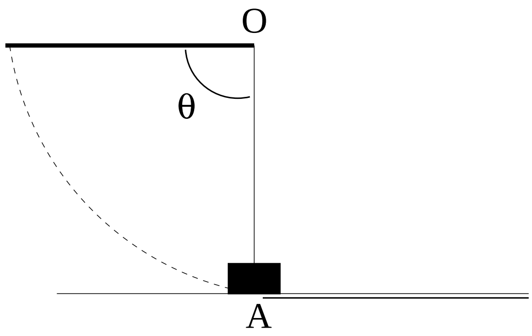

Figura 2: Quesito 2

Durante il moto della sbarra dalla configurazione con θ=90° a quella con θ=0°, l'energia meccanica si conserva (i vincoli sono lisci). Assumendo che il livello di zero dell'energia potenziale gravitazionale coincida con la quota del punto A, si ha, considerando la variazione di quota del centro di massa della sbarretta nel passaggio da una configurazione all'altra:

$$Mgl = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}Mgl \tag{6}$$

in cui ω_0 rappresenta il modulo della velocità angolare della sbarra in θ=0° (quindi subito prima dell'urto) ed $I = Ml^2/3$ è il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O. Dall'eq.6, segue che:

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{l} \tag{7}$$

In corrispondenza di θ=0°, la sbarra urta una particella puntiforme posta in A. Durante l'urto, 1) l'energia cinetica del sistema sbarra+particella si conserva poichè si tratta di un urto completamente elastico 2) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata alla sbarra in O 3) il momento angolare del sistema calcolato rispetto ad O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto ad O è nullo. Segue che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \qquad & conservazione\ \ dell'energia\ \ cinetica \\ I\omega_0 = mlv_0 \qquad & conservazione\ \ del\ \ momento\ \ angolare \end{aligned} \tag{8}$$

Elevando al quadrato la seconda equazione e dividendo membro a membro, si ricava:

$$m = \frac{I}{l^2} = \frac{1}{3}M \tag{9}$$

Sostituendo questo valore ad esempio nella seconda equazione del sistema 8 e sfruttando l'eq.7 si ottiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{MgI}{m^2 l}} = \sqrt{3lg} \tag{10}$$

Numericamente m=1 kg, v_0=7.6 m/s.
La risposta all'ultima domanda del quesito si ottiene considerando che nel tratto percorso dalla particella subito dopo l'urto, tutta l'energia inizialmente a disposizione viene dissipata a causa dell'azione della forza di attrito esercitata dal piano scabro ($|F_{attr}| = \mu_d|N| = \mu_d mg$, in cui N è la reazione normale esercitata dal piano sulla particella durante il moto sulla guida orizzontale). Eguagliando quindi l'energia della particella subito dopo l'urto al lavoro fatto dalla forza di attrito lungo il cammino percorso prima di arrestarsi si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_d mgd \tag{11}$$

da cui

$$d = \frac{3l}{2\mu_d} \tag{12}$$

Numericamente, $d = 4.3$ m.

3 Quesito

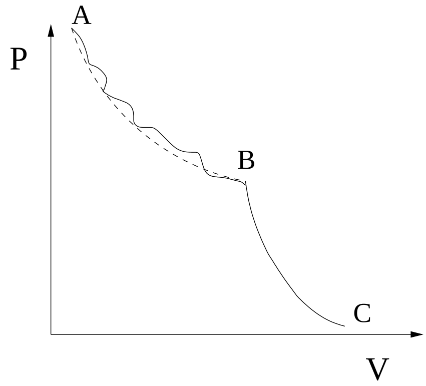

Figura 3: Quesito 3

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si determina il valore della temperatura del gas nello stato A, $T_A= P_A V_A/(N \cdot R)$. (N numero di moli). Numericamente si ha T_A=300,8 K. A partire da T_A si ottiene automaticamente T_B, poichè in un'espansione libera per un gas perfetto vale T_A=T_B. Per il calcolo delle altre variabili termodinamiche nello stato B si sfrutta l'informazione sulla variazione di entropia nel passaggio dallo stato A allo stato C. Tale trasfomazione si compone di una trasformazione irreversibile (l'espansione libera AB) e di una trasformazione adiabatica reversibile. Per quest'ultima, la variazione di entropia è 0 e quindi $\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB}$. Poichè T_A=T_B, per calcolare la variazione di entropia tra A e B, si può utilizzare un'ipotetica trasformazione isoterma reversibile AB (linea tratteggiata in figura).

$$\Delta S_{AB_{rev}} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B nRT\frac{dV}{VT} = NRlog\frac{V_B}{V_A} \tag{13}$$

Nota ΔS_{AB}, possiamo ricavare V_B come segue:

$$\Delta S_{AB} = NRlog\frac{V_B}{V_A} \rightarrow \exp\frac{\Delta S_{AB}}{NR} = \frac{V_B}{V_A} \tag{14}$$

Numericamente si ottiene $V_B \sim 2\ V_A$= 0.2m^3.
Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava P_B= 0.5 P_A=$1 \cdot 10^5$ Pa.

La seconda parte dell'esercizio si risolve osservando che la trasformazione BC è adiabiatica e dunque vale $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$ con γ=7/5 (il gas è biatomico). Noto $V_C = 3V_A$ e con i valori V_B e P_B ricavati precedentemente si ottiene, P_B=$5.7 \cdot 10^4$ Pa