Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 10/09/2013

1 Quesito 1)

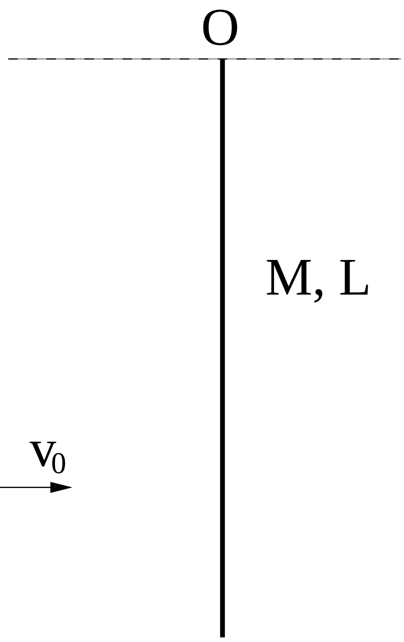

Figura 1: Quesito 1

Durante l'urto tra proiettile e sbarra non si conserva la quantità di moto a causa delle presenza delle reazioni vincolari di natura impulsiva applicate in O. Non si conserva neppure l'energia cinetica perchè si tratta di un urto completamente anelastico. Si conserva invece il momento angolare rispetto al polo O la cui componente $\mathcal{L}$ lungo la direzione dell'asse di rotazione vale:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} L m v_0 = I\omega \tag{1}$$

il termine di sinistra rappresenta il modulo del momento angolare complessivo rispetto ad O subito prima dell'urto ed il termine di destra quello del sistema proiettile+sbarra subito dopo l'urto. I è il momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale passente per O ed ω è il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto. In particolare, per il teorema di Huygens-Steiner, si ha che:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{3}{4}L\right)^2 \tag{2}$$

L'espressione di ω richiesta nel quesito si ricava dall'equazione 1:

$$\omega = \frac{\frac{3}{4}mL}{\frac{1}{3}ML^2 + \frac{9}{16}mL^2}v_0 \tag{3}$$

Subito dopo l'urto il moto del sistema è governato dal principio di conservazione dell'energia meccanica (la forza peso è conservativa e le reazioni vincolari in O non compiono lavoro), dalla cui applicazione si può anche desumere il valore minimo di v_0 affinchè il sistema compia un giro completo. Per ragioni di simmetria, la posizione del centro di massa del sistema proiettile+sbarra, si troverà lungo la direzione della sbarra ad una distanza d_{CM} da O pari a:

$$d_{CM} = \frac{\frac{1}{2}ML + \frac{3}{4}mL}{M+m} \tag{4}$$

Condizione necessaria affinchè il sistema compia un giro completo è che il centro di massa raggiunga la massima quota. Fissato il livello *zero* dell'energia potenziale gravitazionale in corrispondenza della quota di O [1], si ottiene:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - (M+m)gd_{CM} = (M+m)gd_{CM} + \frac{1}{2}I\omega'^2 \tag{5}$$

Il termine a sinistra rappresenta l'energia meccanica del sistema (cinetica + potenziale) subito dopo l'urto, ossia nell'istante in cui sbarra+proiettile cominciano la rotazione attorno all'asse fisso orizzontale passante per O. Il termine a destra rappresenta l'energia meccanica del sistema nel punto di massima quota per il centro di massa ed ω' è il modulo della velocità angolare del sistema a tale quota. Per ricavare il valore minimo di v_0, assumiamo che, in questa configurazione, l'energia meccanica totale sia tutta e solo potenziale (quindi energia cinetica nulla, $\omega' = 0$). Osservando che $\omega = \mathcal{L}/I$ (si veda l'equazione 1):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}^2}{I} \tag{6}$$

e sostituendo nell'equazione 5 si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}^2}{I} = 2(M+m)gd_{CM} = 2g\left(\frac{1}{2}M + \frac{3}{4}m\right)L \tag{7}$$

[1] questa scelta è inizialmente arbitraria (contano le differenze di potenziale), ma una volta fissato lo zero occorre essere coerenti con la scelta fatta

Nell'ultimo passaggio, si è utilizzata l'equazione 4. Sostituendo infine l'espressione di $\mathcal{L}$ e di I in quest'ultima equazione si ottiene:

$$v_0^2 = \frac{32}{9} gL \frac{\left(M + \frac{3}{2}M\right)\left(\frac{1}{3}M + \frac{9}{16}m\right)}{m^2} \tag{8}$$

Numericamente, v_0=152 m/s.

2 Quesito 2)

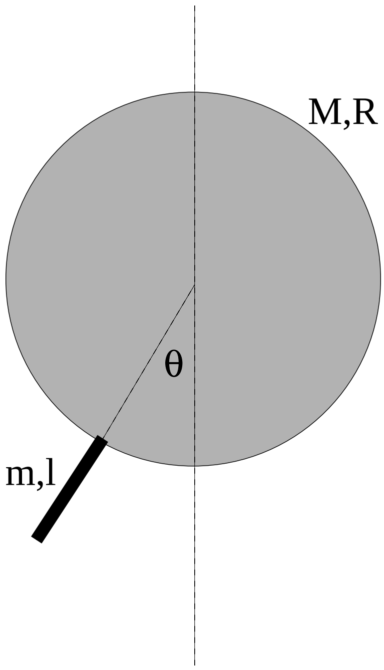

Figura 2: Quesito 2

Il sistema descritto (disco più sbarra) è in sostanza un pendolo fisico, vincolato a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il centro (fisso) O del disco. Il centro di massa del sistema, per ragioni di simmetria, si trova lungo la direzione della sbarra ad una distanza d_{CM} da O:

$$d_{CM} = \frac{\left(R + \frac{l}{2}\right) m}{M + m} \tag{9}$$

L'equazione di moto segue dalla seconda equazione cardinale scritta rispetto ad un polo coincidente con O: $d\underline{L}/dt = \underline{\tau}^{\mathbf{ext}}$. Nel caso specifico, trattandosi di un corpo rigido e riferendosi alla componente lungo la direzione dell'asse di rotazione si ottiene:

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)gd_{CM} = -\left(R+\frac{l}{2}\right)mgsen\theta \tag{10}$$

in cui α rappresenta il modulo dell'accelerazione angolare, θ è l'angolo formato dalla direzione della sbarra con la verticale ed I è il momento di inerzia complessivo del sistema (calcolato utilizzando il teorema di Huygens-Steiner):

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(R+\frac{l}{2}\right)^2 \tag{11}$$

Nel caso delle piccole oscillazioni, l'equazione 10 diventa di tipo armonico

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(R+\frac{l}{2}\right)mg\theta \tag{12}$$

Si noti il segno "-" nelle equazioni 10 e 12. La sua presenza ha un preciso significato fisico. Esso stabilisce infatti il carattere di forza di richiamo della forza peso per il sistema descritto. Nel caso delle piccole oscillazioni tale forza è del tutto equivalente alla forza elastica esercitata da una molla su un oscillatore armonico. La pulsazione Ω corrispondente è:

$$\Omega = \frac{\left(R+\frac{l}{2}\right)mg}{I} = \frac{\left(R+\frac{l}{2}\right)mg}{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(R+\frac{l}{2}\right)^2} \tag{13}$$

Le dimensioni sono quelle attese, ovvero il reciproco di un tempo. Numericamente, $\Omega = 4.9\ \mathrm{s}^{-1}$.

3 Quesito 3)

La pressione eserciata dal gas sul pistone nello stato di equilibrio 1 sarà pari alla forza per unità di superficie esercitata dalla molla nella configurazione che corrisponde ad uno spostamento che definiamo x_1. Lo stesso vale nello stato di equilibrio 2. Valgono dunque le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \frac{kx_1}{S}V_1 &= nRT_1 \\ \frac{kx_2}{S}V_2 &= nRT_2 \end{aligned} \tag{14}$$

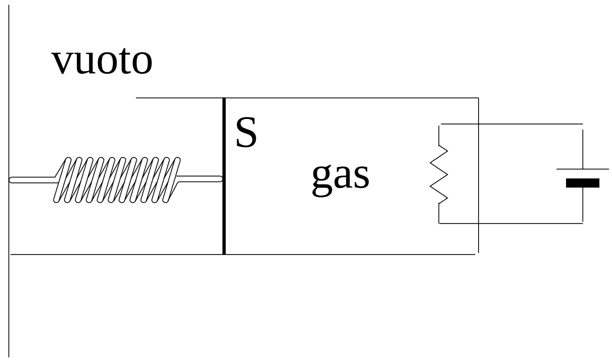

Figura 3: Quesito 3

e sulla base di considerazioni geometriche (scegliamo un sistema di riferimento in cui x_2 >0, x_1 >0 e $x_2 > x_1$):

$$x_2 - x_1 = \frac{V_2 - V_1}{S} \tag{15}$$

Dalla prima relazione nell' equazione 14 si ricava il valore di x_1 (numericamente 0.99 m) e dall'equazione 15 il valore di x_2 (numericamente 1.99 m). Il lavoro compiuto dal gas nell'espansione da V_1 a V_2 è uguale e opposto al lavoro compiuto della forza elastica nel passaggio da x_1 a x_2:

$$L_{1-2}^{gas} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \tag{16}$$

Numericamente, L_{1-2}^{gas}=1500 J.
Noto x_2, si determina T_2 dalla seconda equazione nell'espressione 14 (numericamente T_2 = 662 K). La variazone di energia interna $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$, da cui $Q = \Delta U + L_{1-2}^{gas}$. Numericamente, Q =19550 J.