

Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 12/07/2011

1 Quesito

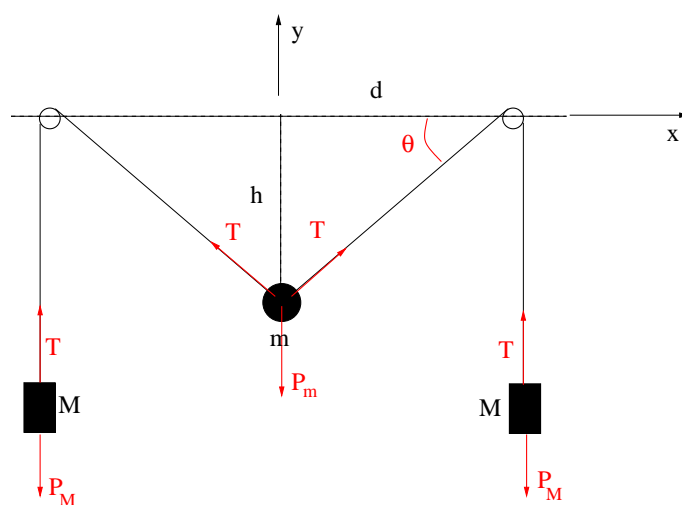


Figure 1: Quesito 1

La risposta alla prima domanda (il valore di h all'equilibrio e la condizione di esistenza di tale configurazione) si ottiene imponendo che la risultante delle forze agenti sulla massa m sia uguale a zero (metodo 1), oppure, equivalentemente, calcolando la funzione che esprime l'energia potenziale complessiva del sistema $m+2M$ ed imponendo che essa abbia un punto di stazionarietà in corrispondenza della distanza d proposta nella traccia del quesito (metodo 2). Di seguito, verranno descritti entrambi i metodi.

metodo 1

Le forze agenti sulla massa m sono le tensioni esercitate delle funi e la forza peso (vedi figura 1). Poichè sia le carrucole che le funi hanno massa trascurabile, il modulo della tensione T applicata su ciascun contrappeso M è uguale al modulo della tensione agente su ciascun lato di m . Si impone

quindi che la risultante delle forze applicate ad m ed ai contrappesi M sia nulla lungo tutte le direzioni.

$$\begin{aligned} \text{asse } y \text{ per } M &\rightarrow T - Mg = 0 \\ \text{asse } y \text{ per } m &\rightarrow 2T \sin \theta - mg = 0 \\ \text{asse } x \text{ per } m &\rightarrow -T \cos \theta + T \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Combinando la prima e la seconda equazione, ed esprimendo $\sin \theta$ in funzione delle lunghezze h e d ($\sin \theta \sqrt{d^2 + h^2} = h$) si ottiene:

$$\frac{2M}{m} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h} \quad (2)$$

Il valore di h all'equilibrio (nota d) è quindi:

$$h = \frac{d}{\sqrt{\frac{4M^2}{m^2} - 1}} \quad (3)$$

Dalla relazione precedente si deduce immediatamente la condizione di esistenza della soluzione (e quindi della configurazione di equilibrio discussa). Ovvero:

$$2M > m \quad (4)$$

condizione verificata nel caso posto dal quesito. Numericamente, h , nella configurazione di equilibrio descritta, vale 0.13 m.

metodo 2

Lo stesso risultato si può ottenere utilizzando la funzione che descrive l'energia potenziale del sistema complessivo costituito dai due contrappesi M e dalla massa m . Quest'ultima, tutta riconducibile all'azione della forza gravitazionale, si può esprimere in funzione di h (che costituisce l'unico grado di libertà del sistema). Assumendo che l'energia potenziale gravitazionale sia nulla in corrispondenza dell'asse x ($y=0$), si ottiene:

$$U(h) = -mgh - 2Mg(L - \sqrt{d^2 + h^2}) \quad (5)$$

La quota a cui si trova ciascun contrappeso, infatti, è correlata ad h , ed è data dalla lunghezza complessiva della fune (uguale ad L) meno il tratto compreso tra la puleggia e la massa m (uguale a $\sqrt{d^2 + h^2}$). Derivando rispetto ad h

la funzione data nell'equazione 5, ed imponendo che la derivata sia nulla in corrispondenza del valore di d assegnato nella traccia ($2d=1.5$ m), si ottiene:

$$\frac{dU}{dh} = -mg + 2Mg \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} = 0 \quad (6)$$

Da cui:

$$\frac{2M}{m} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h} \quad (7)$$

cioè lo stesso risultato fornito dal metodo 1 (si confronti con l'equazione 2). La natura di questa posizione di equilibrio si deduce stabilendo se essa corrisponda ad un punto di minimo (equilibrio stabile) o di massimo (equilibrio instabile). Derivando la funzione energia potenziale due volte rispetto ad h si ottiene:

$$\frac{d^2U}{dh^2} = \frac{2M}{\sqrt{d^2 + h^2}} \left(1 - \frac{1}{\frac{d^2}{h^2} + 1} \right) > 0 \quad (8)$$

ovvero, essendo essa sempre positiva, la posizione di equilibrio risulta stabile per ogni valore di h a patto che sia verificata la condizione di esistenza espressa dall'equazione 4.

Il calcolo del centro di massa del sistema complessivo si ottiene infine applicando la definizione corrispondente. In particolare, si osserva che, nel sistema di riferimento definito in figura 1 e vista la simmetria del problema, la coordinata X_{cm} coincide con l'origine $x=0$. La coordinata Y_{cm} si ottiene dalla media pesata delle distanze dall'origine dei singoli corpi che costituiscono il sistema.

$$Y_{cm} = \frac{-mh - 2M(L - \sqrt{d^2 + h^2})}{m + 2M} \quad (9)$$

Numericamente, $Y_{cm} = -5.2$ cm.

2 Quesito

Le tre fasi che caratterizzano l'evoluzione temporale del sistema descritto nel quesito sono rappresentate in figura 2. Durante l'urto (fase I) NON si conserva l'energia cinetica poichè l'urto è completamente anelastico (la massa m_0 resta conficcata nella sbarra). NON si conserva neppure la quantità di

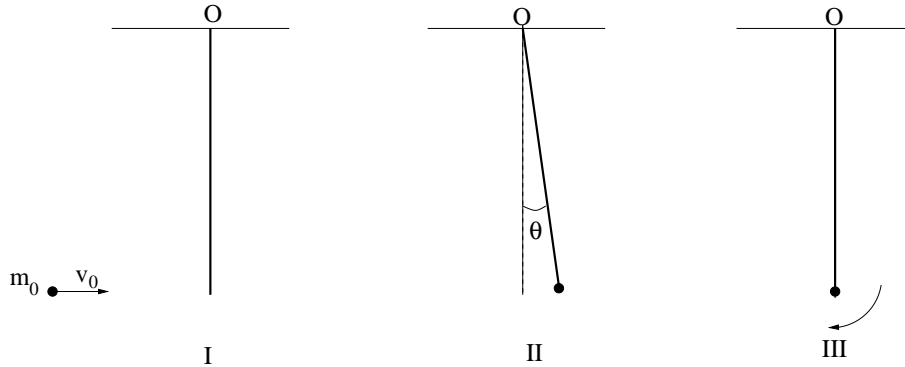


Figure 2: Quesito 1

moto, a causa dell'azione di forze di natura impulsiva durante l'urto (a causa cioè delle reazioni vincolari applicate all'estremo fisso O della sbarra). Si conserva invece il momento angolare rispetto ad un polo coincidente con O poichè è nulla rispetto ad esso la risultante dei momenti delle forze esterne. Si ha quindi che:

$$m_0 v_0 l = I'_O \omega_0 \quad (10)$$

in cui ω_0 rappresenta il modulo della velocità angolare del sistema sbarra+proiettile subito dopo l'urto e I'_O è il momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per O. In particolare:

$$I'_O = \frac{1}{3} M l^2 + m_0 l^2 \quad (11)$$

Dall'equazione 10 si ricava inoltre che:

$$\omega_0 = \frac{m v_0 l}{I'_O} \quad (12)$$

Numericamente, $\omega_0 = 0.18$ rad/s.

Subito dopo l'urto, il sistema comincia a ruotare fino a che il suo centro di massa raggiunge la quota a cui corrisponde il massimo valore dell'angolo θ . Il vincolo in O è liscio e questa condizione implica che l'energia meccanica del sistema si conserva durante il moto. In particolare l'energia cinetica si converte progressivamente in energia potenziale fino al raggiungimento del massimo valore di θ (l'energia diventa tutta potenziale).

$$-g(m_0 + M)d_{cm} \cos \theta_{max} = \frac{1}{2} I'_O \omega_0^2 - (m_0 + M)g d_{cm} \quad (13)$$

d_{cm} , che rappresenta la distanza del centro di massa del sistema dal punto O, si calcola come segue:

$$d_{cm} = \frac{Ml/2 + m_0l}{M + m_0} \quad (14)$$

Tuttavia si verifica numericamente che $d_{cm} \sim l/2$ con un'approssimazione migliore dell'1%, quindi il contributo della massa m_0 non è sufficiente a modificare in modo significativo il centro di massa del sistema complessivo rispetto a quello della sbarra.

Dall'equazione 13 si ottiene:

$$\cos \theta_{max} = 1 - \frac{I_O \omega_0^2}{2(m_0 + M)gd_{cm}} \quad (15)$$

Numericamente $\theta_{max} = 2.7^\circ$.

Poichè si tratta di un angolo molto piccolo che, una volta espresso in radianti, può essere confuso con grande precisione con il suo seno, il regime di moto del sistema complessivo è quello di un pendolo fisico che compie piccole oscillazioni di tipo armonico il cui periodo è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{(m_0 + M)gd_{cm}}} \quad (16)$$

L'intervallo di tempo dopo cui occorre esplodere un secondo proiettile con la stessa velocità del primo in modo tale che la collisione avvenga quando il sistema ripassa da $\theta = 0^\circ$ è pari ad $1/2$ del periodo totale (ovvero il tempo impiegato nel tragitto $\theta = 0^\circ \rightarrow \theta_{max} \rightarrow 0^\circ$). Numericamente, $T/2=0.82$ s.

3 Quesito

La risoluzione del quesito richiede la determinazione delle variabili termodinamiche associate a ciascuno dei quattro stati che costituiscono il ciclo. Nota $P_A=P_B$, utilizzando l'equazione di stato per i gas perfetti $PV = nRT$ ed il fatto che la trasformazione AB è isobara, si ricavano le temperature T_A e T_B . Le variabili termodinamiche degli stati C e D si ricavano dalla relazione $PV^\gamma=\text{costante}$, valida per trasformazioni adiabatiche con $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ ($7/5$) nel caso di un gas monoatomico (biatomico).

$$\begin{aligned} P_B V_B^\gamma &= P_C V_C^\gamma \\ P_D V_D^\gamma &= P_A V_A^\gamma \end{aligned} \quad (17)$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} V_C &= V_B \frac{P_B^{\frac{1}{\gamma}}}{P_C} \\ V_D &= V_A \frac{P_A^{\frac{1}{\gamma}}}{P_D} \end{aligned} \quad (18)$$

La tabella sottostante mostra un quadro riassuntivo dei valori delle grandezze termodinamiche nei rispettivi stati nell'ipotesi di gas monoatomico (ed in parentesi i valori nel caso in cui si tratti di un gas biatomico).

	Volume	Pressione	Temperatura
A	0.005m ³	2000kPa	$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 241\text{K}$
B	0.010m ³	2000kPa	$T_B = 2T_A$
C	0.0151(0.0164)m ³	1000kPa	$T_C = 361(395)\text{K}$
D	0.0075(0.0082)m ³	1000kPa	$T_D = 180(197)\text{K}$

Il calore scambiato nelle trasformazioni AB e CD è dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nC_p(T_B - T_A) > 0 \\ Q_{BC} &= 0 \\ Q_{CD} &= nC_p(T_D - T_C) < 0 \\ Q_{DA} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$Q_{BC} = Q_{DA} = 0$ perchè BC e DA sono trasformazioni adiabatiche reversibili. Il rendimento η del ciclo considerato è:

$$\eta = \frac{Q_{scambiato}}{Q_{assorbito}} = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} \quad (20)$$

Numericamente, $\eta = 24\%$ (18% nel caso del gas biatomico).

Infine, le variazioni di entropia su ciascuna trasformazione del ciclo si calcolano come segue:

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_A^B \frac{dQ}{T} = nC_p \ln \frac{T_B}{T_A} = nC_p \ln 2 \\ \Delta S_{BC} &= 0 \\ \Delta S_{CD} &= \int_C^D \frac{dQ}{T} = nC_p \ln \frac{T_D}{T_C} = nC_p \ln \frac{1}{2} \\ \Delta S_{DA} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Numericamente, $\Delta S_{AB} = -\Delta S_{CD} = 72 \text{ J/K}$ (101 J/K nel caso del gas biatomico). Da ciò risulta inoltre verificato che la variazione complessiva di entropia in un ciclo di trasformazioni reversibili $\Delta S_{ABCD} = 0$.