Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 12/12/2011

1 Quesito 1

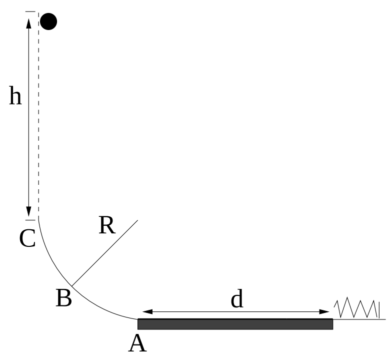

Figura 1: Quesito 1

La soluzione alla prima domanda deriva dallo studio del bilancio energetico nella varie configurazioni. In particolare vale che:

$$mg(h+R) = \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{1}$$

in cui il termine a sinistra rappresenta l'energia potenziale della massa m all'istante iniziale e v_A è la velocità di m al passaggio per il punto A. Negli istanti successivi la partcella attraverserà il piano scabro, dunque parte della sua energia meccanica sarà dissipata per effetto della forza di attrito F_A. In particolare, il lavoro compiuto da F_A nel tratto orizzontale di lunghezza d è pari a $\mu_d dmg$. Il bilancio energetico, dopo il contatto con la molla, si può scrivere come segue:

$$mg(R - R\frac{\sqrt{2}}{2}) = mg(h+R) - 2\mu_d dmg \tag{2}$$

in cui il termine a sinistra rappresenta l'energia meccanica nel punto C nell'ipotesi che la particella vi arrivi con velocità nulla. Il termine a destra rappresenta l'energia meccanica nel punto A, ovvero tutta l'energia meccanica a disposizione meno l'energia dissipata per attrito (il fattore 2 tiene conto dell'energia dissipata all'"andata" ed al "ritorno"). Risolvendo rispetto a d si ottiene:

$$d = \frac{1}{2\mu_A}(h + \frac{R\sqrt{2}}{2}) \tag{3}$$

Numericamente, d=4.5 m.

La seconda parte del problema si risolve osservando che:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mg(h + R) - \mu_d dmg \tag{4}$$

in cui il termine a sinistra rappresenta l'energia potenziale associata alla molla nella configurazione di massima deformazione x. Risolvendo rispetto ad x si ottiene

$$x = \sqrt{\frac{2mg(h + R - \mu_d d)}{k}} \tag{5}$$

Numericamente x=0.19 m

2 Quesito 2

La soluzione del primo quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) nella configurazione in cui l'angolo θ=45°. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = m_1 glcos\theta + \frac{1}{2}k4l^2(sen\theta - sen\theta_0)^2 - 2m_2 glcos\theta \tag{6}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato alla sbarra, il secondo quello associato alla forza elastica esercitata dalla molla, il terzo quello gravitazionale associato alla massa puntiforme m_2. (Si è assunto come 0 dell'energia potenziale gravitazionale il livello corrispondente ad y=0 rispetto ad un sistema di riferimento con asse x lungo il segmento orizzontale OB ed asse y verticale). Il termine associato alla forza elastica è ricavato sfruttando l'informazione che la lunghezza a riposo della molla si ha nella configurazione θ_0=30° ed ha valore $2lsen\theta_0$. L'allungamento della molla per

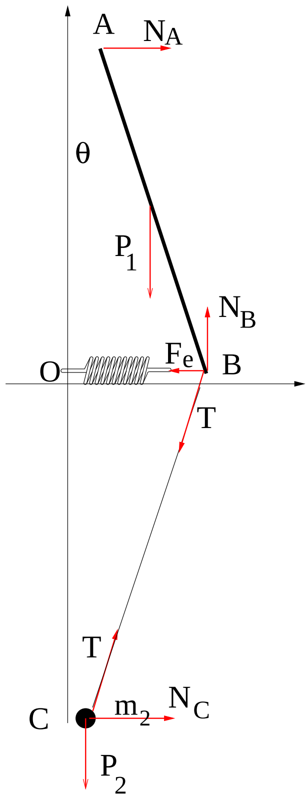

Figura 2: Quesito 2. Diagramma delle forze applicate alla sbarra ed alla massa m_2

un generico angolo θ vale quindi $2l(sen\theta - sen\theta_0)$. Derivando rispetto a θ l'espressione in eq.6, si ottiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 glsen\theta + 4kl^2(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2m_2 glsen\theta \tag{7}$$

Imponendo che $\frac{dU}{d\theta}$=0 in θ=θ_{eq}=45°, e risolvendo rispetto ad m_2, si ottiene

$$m_2 = \frac{m_1}{2} - \frac{2kl}{gtan\theta_{eq}}(sen\theta_{eq} - sen\theta_0) \tag{8}$$

Numericamente, m_2=5.8 kg.
La soluzione del quesito si può ottenere equivalentemente imponendo che la risultante delle forze esterne applicate alla sbarra ed alla massa m_2 sia nulla

(vedi figura 2.)

$$\begin{array}{ll} sbarra,\ lungo\ x & N_A - 2kl(sen\theta - sen\theta_0) - Tsen\theta = 0 \\ sbarra,\ lungo\ y & N_B - m_1 g - Tcos\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ x & N_C + Tsen\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ y & Tcos\theta - m_2 g = 0 \end{array} \tag{9}$$

Si richiede inoltre che la risultante dei momenti delle forze applicate alla sbarra (ad esempio calcolati rispetto al punto A) sia nulla:

$$m_1 glsen\theta + 2lk(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2lTsen(2\theta) - 2lN_B sen\theta = 0 \tag{10}$$

Ricavando ad esempio T ed N_B dall'equazione 9 e sostituendo nell'equazione 10 si ricava il valore di m_2, identico a quello dato nell'equazione 8.

3 Quesito 3

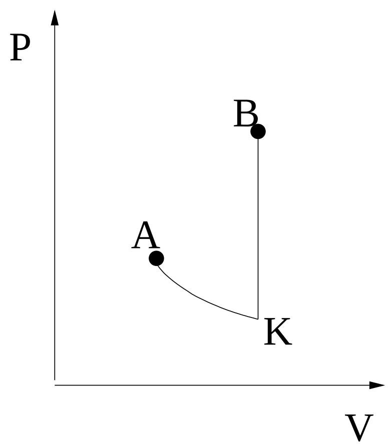

Figura 3: Quesito 3

In figura 3 è rappresentato il ciclo descritto nel testo, composto da una trasformazione isoterma AK e da una trasformazione isocora KB. Dalla relazione dei gas perfetti si ricava il valore della temperatura in A ed in B, rispettivamente T_A = 120 K e T_B = 480 K Nella trasformazione isoterma AK si ha ΔU_{AK}=0, ovvero $\Delta L_{AK} = \Delta Q_{AK}$.

$$\Delta L_{AK} = \int_A^K \frac{nRT_A}{V} dV = nRTln\frac{V_K}{V_A} = nRTln2 \tag{11}$$

Numericamente, $\Delta L_{AK} = \Delta Q_{AK}$=691J

Nella trasformazione isocora KB si ha ΔL_{KB}=0.

$$\Delta Q_{KB} = nc_V(T_B - T_K) = \Delta U_{KB} \tag{12}$$

Numericamente ΔQ_{KB}=4500 J.

Il calore totalmente assorbito nel passaggio da A a B risulta dunque ΔQ_{AB}=5190 J ed il lavoro scambiato ΔL_{AB}=691J.

Il calcolo dell'entropia segue dalla definizione

$$\Delta S_{AB} = \int_A^K \frac{dQ}{T} + \int_K^B \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S_{AB} = \int_A^K \frac{nRdV}{V} + \int_K^B \frac{nc_v dT}{T} = nRln2 + \frac{3}{2}nRln4 \tag{13}$$

Numericamente ΔS_{AB}=23J/K