Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 15/07/2010

1 Quesito

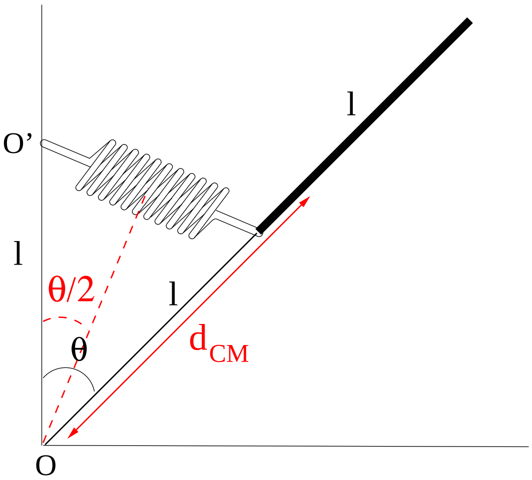

Figura 1: Quesito 1

La soluzione al quesito si ottiene studiando l'energia potenziale del sistema costituito dalle due sbarre e dalla molla. L'energia potenziale gravitazionale del sistema si può calcolare sommando i contributi individuali di ciascuna sbarra (la molla è assunta di massa trascurabile) oppure, equivalentemente, considerando il sistema delle due sbarre come un tutt'uno. In quest'ultimo caso occorre determinare la posizione del centro di massa, che per ragioni di simmetria sarà situata lungo la direzione delle sbarre e a una distanza d_{CM} da O pari a:

$$d_{CM} = \frac{\frac{1}{2}lm_1 + \frac{3}{2}lm_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}l\frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

L'energia potenziale gravitazionale associata è

$$U_{grav}(\theta) = (m_1 + m_2)gd_{CM}cos\theta \tag{2}$$

Il calcolo dell'energia potenziale riconducibile alla forza elastica richiede la determinazione dell'allungamento della molla nel passaggio dalla posizione di riposo (quella in cui θ=θ_0 =30°) a quella di equilibrio (quella in cui θ=45°). Con riferminceto alla figura 1, l'allungamento ΔX è:

$$\Delta X = 2l\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{3}$$

L'energia potenziale ad essa associata sarà quindi

$$U_{elast}(\theta) = \frac{1}{2}k\left[2l\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right)\right]^2 \tag{4}$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è la somma dei termini gravitazionale ed elastico.

$$U_{tot} = U_{elast} + U_{grav} \tag{5}$$

Lo studio degli zeri della funzione derivata prima dell'energia potenziale rispetto a θ fornisce la condizione per cui si realizza l'equilibrio del sistema.

$$\frac{dU_{tot}}{d\theta} = 2kl^2\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right)cos\frac{\theta}{2} - (m_1 + m_2)gd_{CM}sen\theta = 0 \tag{6}$$

Valutando l'espressione precedente in θ=45° si determina il valore di k che garantisce l'equilibrio del sistema a tale angolo.

$$k = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + 3m_2)gsen\theta}{lsen\theta - 2lsen\frac{\theta_0}{2}cos\frac{\theta}{2}} \tag{7}$$

Numericamente, k= 166,5 N/m.

La condizione di equilibrio del sistema si può inoltre ricavare imponendo che la risultante delle forze e dei momenti siano nulle. Ad esempio, la risultante dei momenti fatti rispetto ad O si ottiene considerando i due contributi (di segno opposto) dovuti rispettivamente alla forza peso delle due sbarre $(m_1 + m_2)g$ applicata in d_{CM} e alla forza elastica $k\Delta X$ applicata nel punto di congiunzione delle sbarre.

$$(m_1 + m_2)gd_{CM}sen\theta = 2kl^2\left(sen\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta_0}{2}\right)cos\frac{\theta}{2} \tag{8}$$

Quest'equazione è identica all'espressione ricavata nell'equazione 6 e conduce quindi esattamente allo stesso risultato, come atteso.

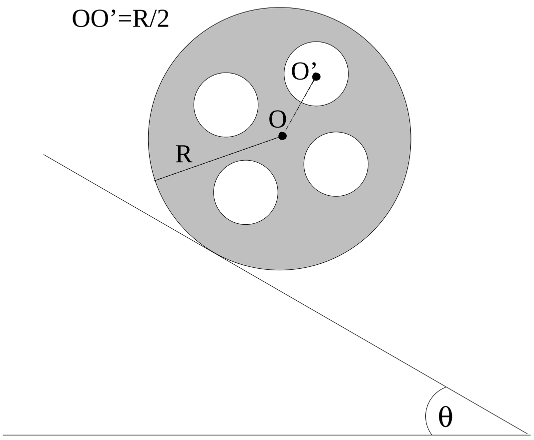

Figura 2: Quesito 2

2 Quesito

La determinazione del momento di inerzia del disco con i 4 fori segue dalle proprietà di additività e dall'applicazione del teorema di Huygens Steiner. Siano:

$$\begin{aligned} M' =& \sigma\pi R^2 \\ & \text{Massa di un ipotetico disco di raggio R} \\ m =& \sigma\pi r^2 \\ & \text{Massa sottratta per ciascun foro} \\ M =& \sigma(\pi R^2 - 4\pi r^2) \\ & \text{Massa del disco di raggio R dopo l'applicazione dei 4 fori} \end{aligned} \tag{9}$$

Il momento di inerzia I_O del disco con i 4 fori si ottiene sottraendo al momento di inerzia di un ipotetico disco di raggio R i contributi associati alla masse rimosse dopo l'applicazione dei fori.

$$I_O = \frac{1}{2}M'R^2 - 4\left[\frac{1}{2}mr^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right] \tag{10}$$

in cui il secondo fattore nella parentesi quadra rappresenta il termine di Huygens Steiner (la distanza tra gli assi paralleli passanti rispettivamente per il centro del disco O ed il centro di ciascun foro è $\left(\frac{R}{2}\right)^2$. Tenendo conto del fatto che $r = R/4$ e sviluppando i calcoli si ottiene

$$I_O = \sigma\pi R^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4^4} - \frac{1}{4^2}\right) \tag{11}$$

Numericamente, I_O=6.7 10^{-2} kg m^2.
Lo studio del moto del sistema in esame richiede l'impiego delle equazioni cardinali in combinazione con la condizione fornita dalla sussistenza del vincolo di puro rotolamento. Rispetto ad un sistema di riferimento con l'asse x positivo lungo il piano inclinato (nella direzione del moto) e scegliendo il centro di massa del sistema come polo rispetto a cui calcolare il momento delle forze si ha che:

$$\begin{aligned} Ma_{cm} &= Mgsen\theta - f_A \\ 0 &= Mgcos\theta + N \\ I_0\alpha &= -f_A R \\ a_{cm} &= -\alpha R \qquad \text{condizone di puro rotolamento} \end{aligned} \tag{12}$$

in cui N è la reazione normale al piano, f_A la forza di attrito statico applicata nel punto di contatto del disco con il piano inclinato, a_{cm} l'accelerazione del centro di massa lungo l'asse x e α il modulo dell'accelerazione angolare (presa positiva se concorde con l'asse z positivo assunto uscente dal piano del foglio). Si tratta di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite (N, a_{cm}, α ed f_A). Ad esempio, utilizzando la terza e la quarta equazione si può esprimere a_{cm} in funzione di f_A e, sostituiendo nella prima equazione, si determina f_A:

$$f_A = \frac{Mgsen\theta}{1 + \frac{MR^2}{I_0}} \tag{13}$$

Il vincolo di puro rotolamento è mantenuto se durante il moto vale che

$$|f_A| \leq \mu|N| \tag{14}$$

in cui μ è il cofficiente di attrito statico. Quest'ultima condizione implica che

$$\mu \geq \mu_{min} = \frac{tan\theta}{1 + \frac{MR^2}{I_0}} \tag{15}$$

Numericamente, $\mu_{min} = 0.214$.
Dalla risoluzione del sistema 12 si ottiene anche il valore di a_{cm}:

$$a_{cm} = \frac{Mgsen\theta}{M + \frac{I_0}{R^2}} \tag{16}$$

La velocità del centro di massa in fondo al piano inclinato si ricava da semplici considerazioni di cinematica poichè il centro d massa del sistema si muove di moto uniformemente accelerato. Quindi

$$v_{cm} = \sqrt{2la_{cm}} \tag{17}$$

Numericamente, v_{cm}=4.29 m/s.

3 Quesito

In figura è rappresentato il ciclo termodinamico descritto nel quesito.

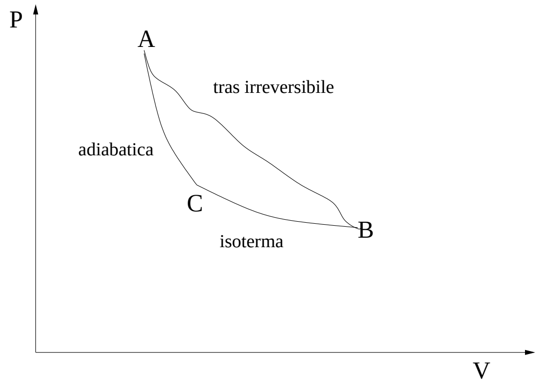

Figura 3: Quesito 3

Il calcolo del lavoro associato alla trasformazione AB segue direttamente dal primo principio della termodinamica U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB}, ovvero L_{AB} = Q_{AB} - nc_V (T_B - T_A). Numericamente, L_{AB}=8.99 kJ.
Il volume del gas nello stato C si determina sfruttando le prorietà delle trasformazioni adiabatiche reversibili.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

in cui $\gamma = c_P/c_V = 5/3$ (gas monoatomico). Risulta dunque

$$V_C = \left(\frac{T_A}{T_{B,C}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A$$

Numericamente, V_C = 0.0457 m^3.
Il calore scambiato nella trasformazione CB si calcola osservando che per un'isoterma è U_{BC} = 0. Ciò implica Q_{BC} = L_{BC}.

$$Q_{BC} = L_{BC} = \int_B^C pdV = nRT_{B,C} \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_{B,C}\ ln\frac{V_C}{V_B} \qquad (18)$$

Numericamente, Q_{BC}=-7.21 kJ.
Infine il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione AB (irreversibile) si può calcolare osservando che

$$S_{AB,irrev} = S_{AC,rev} + S_{CB,rev}$$

Poichè $S_{AC,rev}$=0 (AC è una trasformazione adiabatica reversibile) e CB è una trasformazione isoterma reversibile, si ottiene

$$S_{AB,irrev} = S_{CB,rev} = \int_C^B \frac{dQ_{CB}}{T_{B,C}} = nR\ ln\frac{V_B}{V_C}$$

Numericamente, $S_{AB,irrev}$=36 J/K.