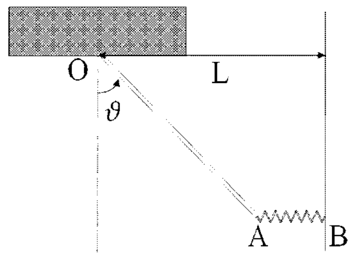
Prova scritta di **FISICA GENERALE I** del 26/7/2011

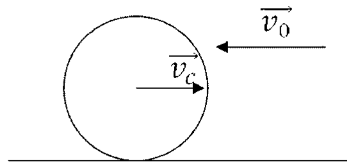
Università del Salento - Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Esercizio 1



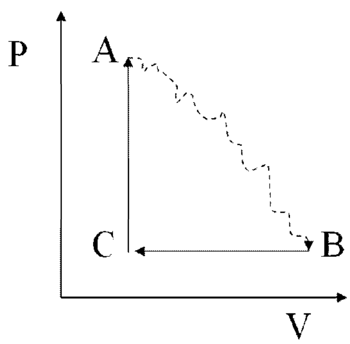
Il sistema meccanico in figura costituito da una sbarra omogenea, di massa M e lunghezza L,vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo superiore O. All'estremo inferiore dell'asta A attaccata una molla con lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k che, all'altra estremità B è vincolata a scorrere senza attrito lungo una guida verticale. Si calcoli il valore della costante elastica k per cui il sistema in equilibrio quando l'angolo di inclinazione della sbarretta con la verticale è pari a 45°. Supponendo che la molla venga rimossa si determini la velocità angolare dell'asta quando raggiunge la posizione verticale.
M=5 kg, L= 1 m.

Esercizio 2



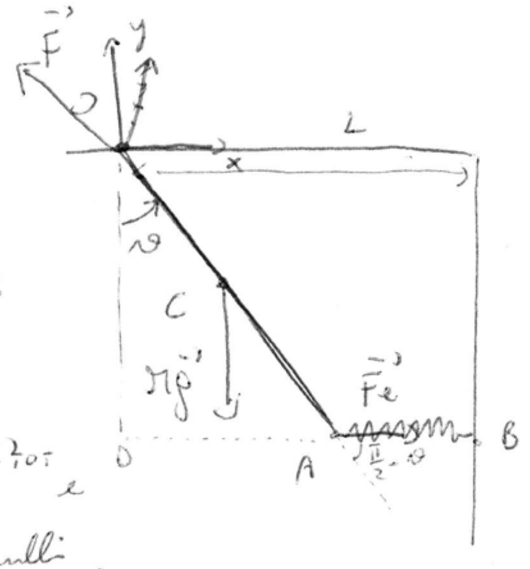
Un disco omogeneo uniforme, di massa M e raggio R, appoggiato ad un piano orizzontale ed in moto di puro rotolamento, subisce un urto istantaneo con un proiettile puntiforme di massa m. Supponendo che la velocità iniziale del proiettile $\vec{v_0}$ sia orizzontale e discorde in verso alla velocità del centro di massa del disco $\vec{v_c}$, che il proiettile disti 3/2R dal piano d'appoggio del disco, e che l'urto sia completamente anelastico:
Si determini il valore di v_0 che consente l'arresto del sistema nell'urto;
Si determini l'energia dissipata nell'urto.
M= 1 kg, R= 50 cm, v_c=10 ms^{-1}, m= 20 g

Esercizio 3



2 moli di un gas perfetto biatomico, inizialmente in equilibrio in uno stato A, subiscono un'espansione adiabatica irreversibile AB in cui il volume del gas raddoppia. Successivamente il gas viene riportato nello stato iniziale reversibilmente tramite una trasformazione isobara BC e una trasformazione isocora CA. Si determinino:
1) Il lavoro fatto dal gas e il calore assorbito nelle tre trasformazioni;
2) Il rendimento del ciclo;
3) La variazione di entropia nella trasformazione AB.
T_A=300 K, P_A=10^5Pa, T_B= 100 K

Esercizio 1



1) Per determinare il valore di k che consente l'equilibrio del sistema per $\vartheta = 45°$ si può procedere in due modi:

a) Nella posizione di equilibrio la risultante delle forze esterne $\vec{F}^{TOT}$ e il momento meccanico totale sono nulli.

Le forze agenti sono il peso della sbarretta $m\vec{g}$ (applicato nel centro di massa C), la forza elastica $\vec{F_e}$ (applicata in A) e la forza vincolare $\vec{F}$ (applicata in O). Rispetto al riferimento in figura le forze si possono esprimere come

$$m\vec{g} = -mg\hat{y} \quad , \quad \vec{F_e} = k\,AB\,\hat{x} \quad , \quad \vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$$

Inoltre $AB = DB - DA = L - L\operatorname{sen}\vartheta$

Calcolando i momenti rispetto a O si ha:

$$\begin{cases} m\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{TOT} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F_e} = \vec{0} \\ I_O\vec{\alpha} = \vec{\tau}_O^{\,TOT} = \vec{OC} \times m\vec{g} + \vec{OA} \times \vec{F_e} = \vec{0} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si possono ricavare le componenti di $\vec{F}$ (non richieste) trovando
$$\begin{cases} F_y = mg \\ F_x = -k\,AB \end{cases}$$

Dalla seconda invece si ha:

$$\begin{cases} \vec{OC} \times m\vec{g} + \vec{OA} \times \vec{AB} = -\frac{L}{2} mg \operatorname{sen}\vartheta + L\,k\,AB \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = 0 \iff \\ \iff -\frac{L}{2} mg \operatorname{sen}\vartheta + L\,k\,L(1 - \operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta = 0 \iff \end{cases}$$

$$\iff -\frac{mg}{2}\operatorname{sen}\vartheta + kL\cos\vartheta(1 - \operatorname{sen}\vartheta) = 0 \iff k = \frac{mg\operatorname{sen}\vartheta}{2L\cos\vartheta(1 - \operatorname{sen}\vartheta)}$$

Chiedendo che l'equilibrio si abbia per $\vartheta = 45°$ si trova $\left(\operatorname{sen}45° = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$k = \frac{mg}{2L\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{mg}{L(2 - \sqrt{2})} = \frac{5 \cdot 9.81}{1(2 - \sqrt{2})} = 83.7 \ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

b) Equivalentemente, dato che le forze agenti sono conservative ($m\vec{g}$ e $\vec{F}_e$) o a lavoro nullo ($\vec{F}$ è a lavoro nullo perché il vincolo è liscio), la posizione di equilibrio si ottiene come posizione di minima energia potenziale totale.

Ricordando che $E_{pg} = mg\,y_c$ (con y calcolato lungo un'asse verticale verso l'alto)

e che $E_{pe} = \frac{1}{2} k \Delta L^2$

nel riferimento in figura si ha

$$E_p^{TOT} = mg\,y_c + \frac{1}{2} k \Delta L^2 = -mg\frac{L}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2} k L^2 (1-\operatorname{sen}\vartheta)^2$$

Imponendo la condizione

$\frac{dE_p^{TOT}}{d\vartheta} = 0$ si ha $\frac{d}{d\vartheta}\left(-mg\frac{L}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2} k L^2 (1-\operatorname{sen}\vartheta)^2\right) =$

$$= mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\vartheta - \frac{1}{2} k L^2\, 2(1-\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta = 0$$

da cui si ottiene $k = \frac{mg\operatorname{sen}\vartheta}{2L\cos\vartheta(1-\operatorname{sen}\vartheta)}$, esattamente come al punto a.

2) Per determinare la velocità angolare dell'asta quando passa dalla verticale è sufficiente notare che il moto dell'asta, dopo che la molla è stata rimossa, avviene sotto l'azione del peso $m\vec{g}$, conservativo, e della forza vincolare $\vec{F}$, a lavoro nullo. Pertanto si conserva l'energia meccanica.

$$E_i = E_f \iff \frac{1}{2} I_O \underbrace{\omega_i^2}_{0} + mg\,y_{ci} = \frac{1}{2} I_O \omega_f^2 + mg\,y_{cf}$$

(l'asta parte da ferma)

$y_{ci} = -\frac{L}{2}\cos\vartheta \qquad y_{cf} = -\frac{L}{2}$ pertanto

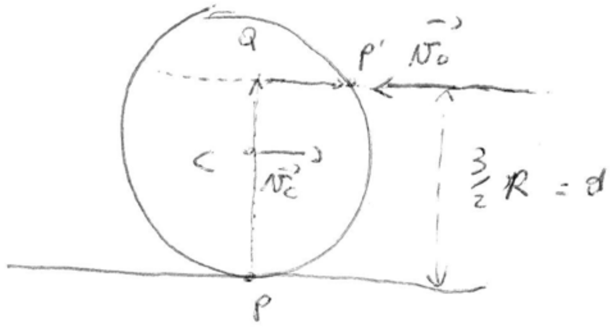
$$\frac{1}{2} I_O \omega_f^2 = +mg\frac{L}{2}(1-\cos\vartheta) \iff \omega_f^2 = \frac{2}{I_O} mg\frac{L}{2}(1-\cos\vartheta) = \frac{mg}{I_O} L(1-\cos\vartheta)$$

$$= \frac{mgL}{\frac{mL^2}{3}}(1-\cos\vartheta) = \frac{3g}{L}(1-\cos\vartheta) = \frac{3\cdot 9.81}{1}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8.62\,(\text{rad}\,s^{-1})^2 \Rightarrow \omega_f = 2.94\ \text{rad}\,s^{-1}$$

Poiché la rotazione è oraria si avrà $\vec{\omega}_f = -\omega_f \hat{z}$

Esercizio 2

1) L'urto è completamente anelastico, quindi non si conserva l'energia cinetica.



Si conserva invece il momento angolare rispetto a $\vec{P}$ pertanto

$\vec{L}_{Pi} = \vec{L}_{Pf} \iff I_P \vec{\omega}_i + \vec{PP'} \times m\vec{v}_0 = \vec{L}_{Pf} = \vec{0}$ (perché l'urto provoca l'arresto del sistema)

Inoltre si ha, dato il puro rotolamento col il verso di moto iniziale del disco, $\vec{\omega}_i = -\frac{v_{ci}}{R}\hat{z}$.

Infine $I_P = I_C + MR^2$ (T. di Steiner) $= \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$+I_P\omega_{iz}\hat{z} + d\,m v_0\hat{z} = \vec{0} \iff v_0 = -\frac{I_P\omega_{iz}}{d\,m} = -\frac{\frac{3}{2}MR^2\left(-\frac{v_c}{R}\right)}{\frac{3}{2}R\,m} =$

$= \frac{M}{m}v_c = 500\,m\,s^{-1}$

Allo stesso risultato si poteva arrivare anche osservando che le forze vincolari presenti, $\vec{N}$ e $\vec{F_s}$, sono entrambe limitate superiormente, e quindi non impulsive. Pertanto nell'urto si conserva anche la quantità di moto e si ha:

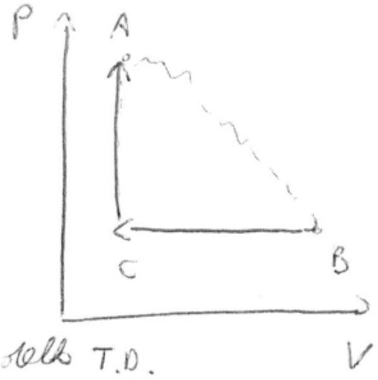
$\vec{p}_i^{\,TOT} = \vec{p}_f^{\,TOT} \iff M\vec{v}_c + m\vec{v}_0 = \vec{0} \iff \vec{v}_0 = -\frac{M}{m}\vec{v}_c$

2) L'energia dissipata nell'urto è in generale pari alla differenza tra l'energia cinetica totale prima dell'urto e quella dopo l'urto.
Nel caso specifico l'energia cinetica finale è zero, perché l'urto provoca l'arresto del sistema pertanto:

$E_{diss} = E_{ci}^{TOT} - E_{cf}^{TOT} = E_{ci}^{TOT} = \frac{1}{2}I_P\omega_i^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\frac{v_c^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv_0^2$

$= \frac{3}{4}Mv_c^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 2575\ J$

Esercizio 3



1) Trasformazione AB.

Il calore assorbito Q_{AB} è nullo, per definizione di adiabatica.

Il lavoro fatto si ottiene dal I. Principio della T.D.

$$\Delta U_{AB} + L_{AB} = Q_{AB} = 0 \iff L_{AB} = -\Delta U_{AB} = -n C_v (T_B - T_A)$$

con $C_v = \frac{5}{2} R$

Trasformazione BC

La trasformazione è isobara pertanto

$$Q_{BC} = n C_p (T_C - T_B) \quad e \quad L_{BC} = P_B (V_C - V_B)$$

con $C_p = \frac{7}{2} R$

Trasformazione CA

$L_{CA} = 0\,J$ perché CA è isocora

$$Q_{CA} = n C_v (T_A - T_C)$$

Per determinare i valori numerici determiniamo le variabili di stato in A, B, C. In A sono noti T e P, pertanto

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 4.99 \; 10^{-2} \; m^3$$

In B è noto il volume (perché $V_B = 2V_A$) e la temperatura quindi

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 16667 \; Pa$$

In C sono noti il volume ($V_C = V_A$) e la pressione ($P_C = P_B$) pertanto

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 50 \; K$$

Da cui si ottiene:

$L_{AB} = 8314\,J$ | $Q_{AB} = 0\,J$

$L_{BC} = -831.4\,J$ e $Q_{BC} = -2910\,J$

$L_{CA} = 0\,J$ | $Q_{CA} = 10392\,J$

2) Il rendimento può essere calcolato indifferentemente come rapporto tra lavoro fatto e calore assorbito, o tra calore scambiato e calore assorbito.

$$\eta = \frac{L^{TOT}}{Q_{ASS}} = \frac{Q^{TOT}}{Q_{ASS}} \quad \text{quindi}$$

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{CA}} \quad \text{o} \quad \eta = \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{CA}}$$

in entrambi i casi si ottiene $\eta = 0.72 = 72\ \%$

3) $$\Delta S_{AB} = \int_{A\ \text{rev}}^{B} \frac{dQ}{T}$$

È importante notare che ΔS_{AB} è diversa da $0\ \frac{J}{K}$, perché AB è adiabatica, ma irreversibile. L'integrale che definisce ΔS_{AB} va calcolato lungo una qualsiasi trasformazione reversibile che inizi in A e finisca in B. Scegliendo di usare la combinazione di BC e CA, effettuate al contrario abbiamo:

$$\Delta S_{AB} = \int_{A\ V_{cost}}^{C} \frac{dQ}{T} + \int_{C\ P_{cost}}^{B} \frac{dQ}{T} = n C_v \log \frac{T_C}{T_A} + n C_p \log \frac{T_B}{T_C} =$$

$$= -74.48 + 40.34 = -34.14\ J K^{-1}$$