# Moto di un proiettile: calcolo del luogo dei punti descritto dai massimi delle traiettorie e calcolo della parabola di sicurezza

Dallo studio del moto di un proiettile abbiamo ricavato che il tempo a cui la quota è massima vale:

$$t_{max} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{1}$$

Le coordinate del massimo $x_{max}$, $y_{max}$ si ottengono dalle equazioni di moto, calcolate al tempo $t_{max}$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \tag{2}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{3}$$

Il luogo dei punti descritto dai massimi delle traiettorie al variare dell'angolo di lancio $\theta$ si può ottenere come segue. Si elevano al quadrato entrambi i membri dell'equazione 2. Osservando che $\cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$ e ponendo $a = v_0^2/g$, l'eq. 2 diventa:

$$x_{max}^2 = a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta = a^2 \sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) \tag{4}$$

Dall'eq. 3 si ottiene:

$$\sin^2\theta = \frac{2y_{max}}{a} \tag{5}$$

Sostituendo l'espressione di $\sin^2\theta$ (eq. 5) nell'eq. 4 si ottiene:

$$x_{max}^2 = 2y_{max}a - 4y_{max}^2 \tag{6}$$

L'eq. 6 è l'equazione di un'ellisse (in verde in Fig. 1) che rappresenta il luogo dei punti descritto dai massimi delle traiettorie ottenute per differenti angoli e assumendo una velocità iniziale costante in modulo (semicerchio rosso in Fig. 1 )

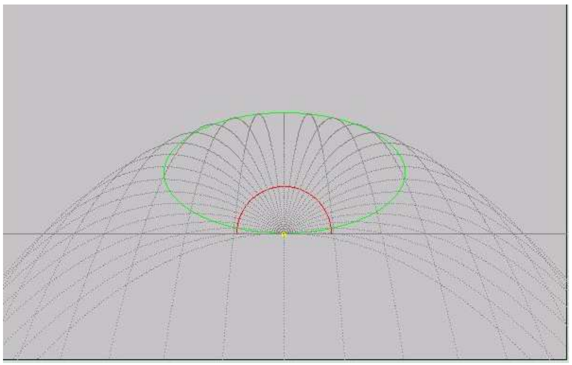

Figura 1:

## Parabola di sicurezza

Combinando le equazioni di moto che descrivono il moto di un proiettile, si determina la traiettoria:

$$y = x \tan\theta - \frac{x^2}{2a\cos^2\theta} \tag{7}$$

Ci chiediamo quale sia la regione dello spazio entro cui un bersaglio è potenzialmente colpibile, e complementarmente, la regione dello spazio non accessible (regione di "sicurezza").
Sfruttando la relazione $1/cos^2\theta = 1 + tan^2\theta$, possiamo riscrivere l'eq. 7 come segue:

$$\frac{x^2}{2a}\tan^2\theta - x\tan\theta + y + \frac{x^2}{2a} = 0 \tag{8}$$

Si tratta di un'equazione quadratica in $\tan\theta$. In generale si ha:

$$\tan\theta_{1,2} = \frac{a}{x}\left(1 \pm \frac{2}{a}\sqrt{\frac{a}{2}\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] - y}\right) \tag{9}$$

Si hanno due soluzioni distinte [1] se il determinante è postivo, due soluzioni reali e coincidenti se il determinante è nullo, nessuna soluzione se il determinante è negativo. I punti le cui coordinate soddisfano la condizione

$$y > \frac{a}{2}\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] \tag{10}$$

[1]Esistono due possibilità (due angoli) per raggiungere il bersaglio

non possono essere raggiunti dal proiettile per nessun valore dell'angolo $\theta$ (deteminante negativo). La curva in eq. 11 (parabola di “sicurezza”)

$$y = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] \tag{11}$$

deriva dall'inviluppo di tutte le parabole che rappresentano le traiettorie possibili al variare dell'angolo di lancio $\theta$.